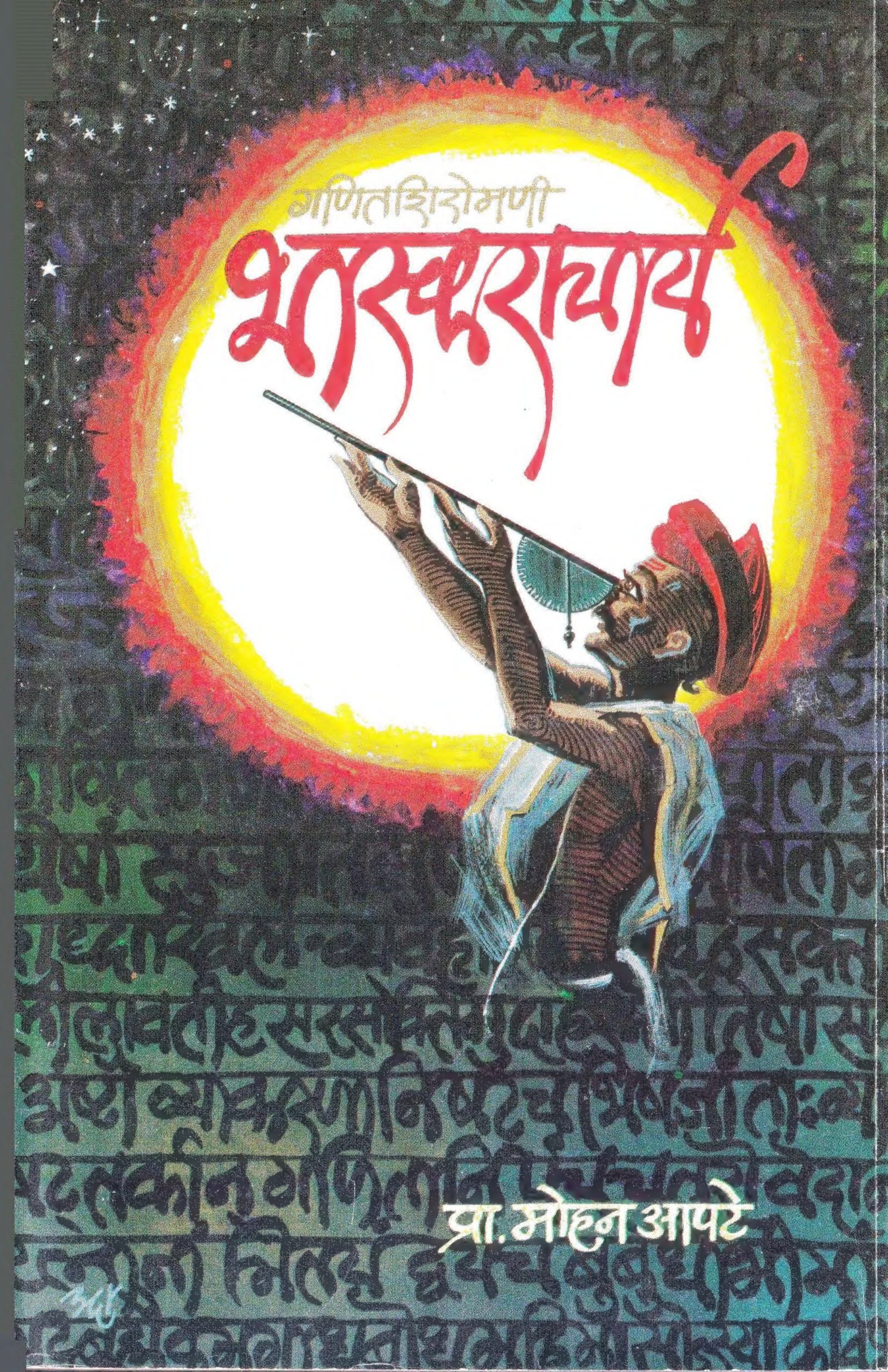
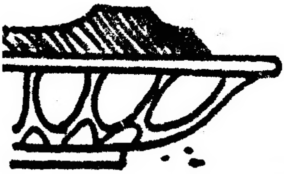

गणितशिरोमणी
भास्कराचार्य
प्रा. मोहन आपटे

गणितशिरोमणी

भास्कराचार्य

प्रा. मोहन आपटे

मोरया
प्रकाशन





गणितशिरोमणी
भास्कराचार्य
प्रा. मोहन आपटे

प्रकाशक :
दिलीप महाजन
मोरया प्रकाशन
'संपदा', शास्त्रीनगर, डोंबिवली (प.),
जि. ठाणे - ४२१ २०२.

पुणे शाखा :
अनुश्री सोसायटी, ४०/१० एरंडवणा,
इंदिरा हाईटस् जवळ, पुणे ४११ ०३८.

अक्षरजुळणी :
रुपाली डेटा सर्व्हीसेंस
१, अनुपम अपार्टमेंट,
केळकर रोड, डोंबिवली (पू.).

मुद्रक :
एस. एम. जंगम
जंगम कलामुद्रण
१९६ पाषाण, पुणे-८

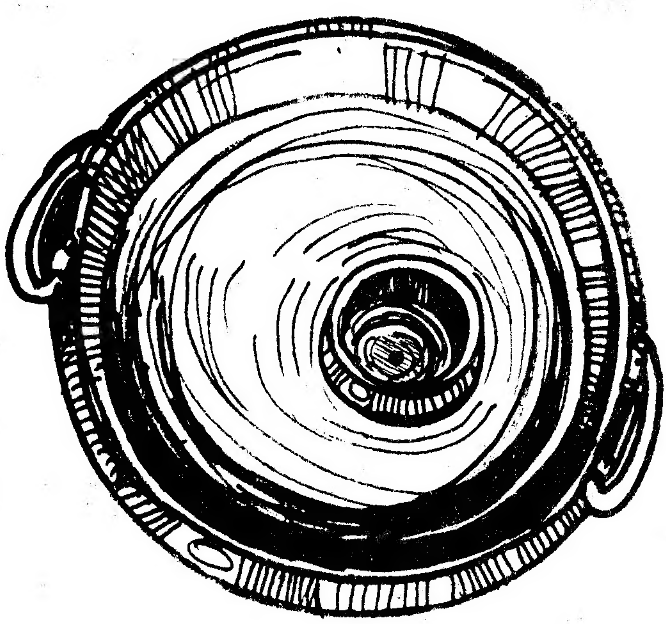
मुखपृष्ठ / आतील चित्रे
अनिल दाभाडे

द्वितियावृत्ती : ११ फेब्रुवारी १९९६

गणितशिरोमणी

भास्कराचार्य

गणितशिरोमणी भास्कराचार्य यांच्या पवित्रस्मृतीस.....





प्रस्तावना

प्रत्येक राष्ट्राच्या आयुष्यात उत्कर्षाचा आणि अपकर्षाचा काळ असतो. तसा तो भारतवर्षाच्या जीवनातही आला. आता पुन्हा, धिमेपणाने का होईना भारताची उत्कर्षाकडे वाटचाल सुरू आहे. इस्लामी आक्रमणाची काळी कभिन्न छाया पडण्यापूर्वी भारताने शतावधी वर्षांचा कालखंड उत्कर्षात घालविला. त्याही काळात परचक्रे आली पण एकंदर भारतीय जीवनावर ती फारसा प्रभाव पाडू शकली नाहीत. आपल्या उत्कर्षाच्या काळात भारतीय संस्कृतीने विद्येच्या अनके क्षेत्रांमध्ये अत्युच्च शिखर गाठले होते. आयुर्वेद, योग, संगीत, नृत्य, गणित, खगोलशास्त्र, व्याकरण, स्थापत्यशास्त्र, शिल्पकला, अशा विविध क्षेत्रातील आपल्या पूर्वजांची कामगिरी अतुलनीय होती. चौदा विद्या आणि चौसष्ट कलांमध्ये भारतवर्ष आघाडीवर होता. नालंदा, आणि तक्षशीला विद्यापीठांत सरस्वती सुखाने नांदत होती.

इस्लाम च्या आक्रमणानंतर सारेच चित्र बदलले. आमच्या कला आणि विद्या यांच्या उपासनांचा झपाट्याने ऱ्हास होत गेला. भारतातील अनेक विद्यापीठे आणि त्यामधील सहस्त्रावधी ग्रंथ आगीच्या भक्षस्थानी पडले, ते याच काळात. ज्या मंदिरांच्या प्रांगणात भारतीय कला आणि विद्या, विकसत होत होत्या, फुलत होत्या, ती उत्तुंग मंदिरे जमिनदोस्त करण्यात आली तीही याच काळात. सातत्याच्या जीवनमरणाच्या झगड्यात विद्येची जोपासना होऊ शकत नाही. गुलामीचे जीणे प्राप्त झाले की एकंदर समाजाचीच अधोगती होते आणि अत्यंत दुष्ट रूढींचा समाजात प्रादुर्भाव होतो. भारतीय समाजाची तशीच काहीशी स्थिति, एक सहस्त्र वर्षांच्या

गुलामगिरीच्या कालखंडात झाली.

देशातील परिस्थिती अस्थिर, विपरीत आणि भीषण असतानाही त्या गुलामगिरीच्या सहस्त्रवर्षातही भारतीय संस्कृतीने अनेक उत्तुंग व्यक्तिमत्वे निर्माण केली आणि त्यांनी आपला ठसा भारतीय जीवनावर उमटविला. भारतीय संस्कृतीचा प्रवाह अनिर्बंध आणि उक्षुण्ण असल्याचा तो प्रखर पुरावा आहे. गणितचक्रचुडामणी भास्कराचार्य हे असेच एक अत्यंत बुध्दिमान व्यक्तित्व याच काळात होऊन गेले. १११४ हे त्यांच्या जन्माचे तर ११९३ हे त्यांच्या निर्वाणाचे वर्ष आहे. भास्कराचार्यांसारखा, सर्व विद्यापारंगत, कुशाग्र बुध्दीचा गणिती, आदर्श शिक्षक, आणि उच्च दर्जाचा खगोलविद् पुन्हा पुन्हा जन्माला येत नाही.

भास्कराचार्यांचा सिध्दांत शिरोमणी हा ग्रंथ म्हणजे, इसवी सन ५०० साली होऊन गेलेल्या आर्यभटापासून पुढील ६०० वर्षांच्या भारतीय खगोलशास्त्राचा कळसाध्याय आहे. ज्याला भारतीय खगोलशास्त्राचा अभ्यास करायचा असेल त्याला सिध्दांत शिरोमणी ह्या एकाच ग्रंथाचे अध्ययन पुरेसे आहे. सिध्दांत शिरोमणी ह्या एका ग्रंथाच्या अंतर्गत लीलावती, बीजगणित, गणिताध्याय आणि गोलाध्याय, असे चार उपग्रंथ आहेत. त्यातील लीलावती ह्या ग्रंथाचे नाव बऱ्याच जणांना माहित आहे, बीजगणित काही लोकांना माहित असते, कारण हे ग्रंथ किमात ६०० वर्षे साऱ्या भारतात पाठ्यपुस्तके म्हणून वापरले जात असत. गणिताध्याय आणि गोलाध्याय हे पूर्णतः खगोलशास्त्रीय ग्रंथ असल्यामुळे, त्यांची नावे अनेकांना माहितही नाहीत.

भास्कराचार्यांची लेखन पध्दती सुरस, काव्यमय आणि शिस्तबध्द आहे. त्यामध्ये पाल्हाळाला जागाच नाही. विषयांची मांडणिही अतीशय रेखीव आहे. साधारणतः कोणत्याही सूत्राची उपपत्ती कुठेही दिलेली नाही. भारतीय शास्त्रकारांची तशी प्रथाच आहे. कमीत कमी शब्दात जास्तित जास्त ज्ञान सूत्रमय भाषेत ग्रथित करण्यात भारतीय विद्वानांचा हात कुणीच धरू शकत नाही. त्याचे प्रत्यंतर सिध्दांत शिरोमणीत पदोपदी येते.

भास्कराचार्य आपल्या काळाच्या कितीतरी पुढे होते यात शंकाच नाही. सतराव्या, अठराव्या शतकात पाश्चात्य गणितज्ञांनी विचारार्थ घेतलेले काही गणिती सिध्दांत आणि समीकरणे यांचे सुलभ विश्लेषण त्यांच्या आधी ५०० वर्षे भास्कराचार्यांनी करून ठेवले होते. इंन्डिटरमिनेट इक्वेशन ऑफ् फर्स्ट ॲन्ड सेंकड डिग्री, कॅलूक्युलस, इक्वेशन ऑफ टाइम, इमॅजिनरी नंबर्स वगैरे गोष्टी त्यांच्या

सखोल बुध्दिमत्तेची साक्ष देतात. ही समीकरणे सोडविण्याच्या भास्कराचार्यांच्या पध्दती अतीशय सोप्या आहेत हे विशेष.

भास्कराचार्यांना अनंत ह्या गणिती संकल्पनेची अंधुक जाण झाली होती. त्यांना काल्पनिक संख्यांचे (इमॅजिनरी नंबर्स) महत्व कळले होते. कॅलूक्युलसचा त्यांना अंदाज आला होता. तथाकथित पास्कलचा त्रिकोण त्यांना माहित होता. तथाकथित पेलच्या समीकरणांची उत्तरे शोधून काढण्यासाठी त्यांनी सुलभ पध्दती शोधल्या होत्या. इन्डिटरमिनेट इक्वेशन ऑफ् सेकंड डिग्री म्हणजेच चक्रवाल समीकरणे सोडविण्याची त्यांची पध्दत आजही सर्वोत्कृष्ट आहे. ॲस्ट्रोलोब ह्या अरबी खगोलशास्त्रीय उपकरणाचा पाया, फलक यंत्राच्या स्वरूपात भास्कराचार्यांनी घातला होता.

प्रा. नारायण हरि फडके यांनी १९७१ साली भास्कराचार्यांच्या लीलावती ह्या ग्रंथाचे स्पष्टिकरण करणारे एक अत्युत्तम पुस्तक मराठीत लिहिले होते. त्या ग्रंथाच्या प्रस्तावनेत ते लिहितात.

‘आमच्याकडे असा गणकचक्रचुडामणि जन्माला यावा हे आमचे भाग्य, पण आम्ही असे कर्मदरिद्री की इ. स. १९५० मध्ये त्याच्या ‘सिध्दांतशिरोमणीची’ आठवी शताब्दी सादर करण्यास आम्ही पूर्णपणे विसरलो. निदान १९९३ मध्ये त्याची आठशेंवी पुण्यतिथी साजरी करण्याची आठवण ठेवू या.’

प्रा. फडके यांचे हे तळमळीचे उद्‌गार म्हणजे, वर्तमान भारतीय नागरिकांचा आपल्या महान पूर्वजांकडे तटस्थ आणि उपेक्षा वृत्तीने पहाण्याच्या प्रवृत्तीवर केलेला एक जबरदस्त प्रहार होता. भास्कराचार्यांनी सिध्दांतशिरोमणी हा ग्रंथ लिहिला त्याला १९५० साली ८०० वर्षे पूर्ण झाली होती त्या निमित्ताने सांस्कृतिक दृष्ट्या साऱ्या भारतात अग्रेसर असणाऱ्या महाराष्ट्रात तरी किमान त्यांच्या कार्यावर विचार-विमर्श होणे आवश्यक होते, पण आम्ही इतरांच्या फारसे पुढे नाही, हे आम्ही दाखवून दिले. १९९३ साली अशा अकर्म्यण्यतेची पुनरावृत्ती होऊ नये म्हणून, पार्ल्याच्या जनसेवा समितीच्या माध्यमातून भास्कराचार्य महोत्सव साजरा करण्याचे मी निश्चित केले, त्या निमित्ताने भास्कराचार्यांच्या काही संकल्पना स्पष्ट करणारा हा ग्रंथ वाचकांच्या हातात देताना मला आनंद होत आहे. आपल्या महानूपूर्वजांचे ऋण फेडण्याचा हा एक अल्पसा प्रयत्न आहे.

इत्यलम्

प्रा. मोहन आपटे

अनुक्रमणिका:



अष्टौ व्याकरणानि षट् च भिषजां व्याचष्ट ताः संहिताः
षट् तर्कान् गणितानि पंच चतुरो वेदानधीते स्म यः ।। रत्नानां त्रितयं

१



भास्कराचार्य : जन्म आणि व्यक्तित्व

भास्कराचार्यांनी स्वतःबद्दल फारच थोडी माहिती आपल्या ग्रंथात दिली आहे. सर्वसाधारणपणे सर्वच प्राचीन ग्रंथकारांची परंपरा अशीच आहे. सिद्धांतशिरोमणी ह्या भास्कराचार्यांच्या प्रख्यात ग्रंथात प्रश्नाध्याय नावाचे एक प्रकरण आहे, त्यामध्ये

५८ व्या श्लोकात भास्कराचार्यांनी आपले जन्मवर्ष मात्र स्पष्टपणे सूचीत केले आहे. तो श्लोक असा आहे.

रसगुणपूर्णमही समशकनृपसमये अभवत् ममोत्पतिः
रसगुणवर्षेण मया सिद्धांतशिरोमणी रचितः

रसगुणपूर्णमही आणि रसगुण ह्या वस्तुतः संख्या आहेत. त्यातील शब्दांचे अर्थ पुढीलप्रमाणे आहेत.

रस = ६, गुण = ३, पूर्ण = ०, मही = १.

यावरून वरील श्लोकाचा अर्थ असा होतो.

शालिवाहन शके १०३६ साली माझा जन्म झाला आणि वयाच्या ३६ व्या वर्षी मी सिद्धांतशिरोमणी ह्या ग्रंथाची रचना केली. इसवी सनाप्रमाणे १०३६ + ७८= १११४ साली भास्कराचार्यांचा जन्म झाला व त्यांनी १०३६ + ३६ + ७८ = ११५० साली सिद्धांतशिरोमणी हा ग्रंथ लिहिला.

आपले कूळ, पित्याचे नाव, निवासाचे गाव याबद्दलही थोडीफार माहिती सांगून भास्कराचार्यांनी सिद्धांतशिरोमणी हा ग्रंथ समाप्त केला आहे. ते लिहितात.

आसीत् सह्यकुलाचलाश्रितपुरे त्रैविद्यविद्वज्जने
नानासज्जनधाम्नि विज्जडविडे शाण्डिल्यगोत्रो द्विजः।
श्रौतस्मार्त विचारसार चतुरो निःशेष विद्या निधिः
साधूनाम् अवधिः महेश्वरकृती दैवज्ञचूडामणिः।।

तत् जः तत् चरणारविन्दयुगुलः प्राप्तः प्रसादः सुधीः
मुग्धोद्बोधकरं विदग्धगणकः प्रीतिप्रदं प्रस्फुटम्।
एतद् व्यक्तसद् उक्तिः युक्तिबहुलं हेलावगम्यं विदां
सिद्धान्तग्रथनं कुबुद्धिमथनं चक्रे कविर्भास्करः।।

सह्यपर्वताच्या रांगाचा आश्रय ज्या भूप्रदेशाला लाभला आहे, ज्या ठिकाणी तीनही वेदांचे ज्ञान असलेले विद्वान रहातात, जे सर्व विद्यांचे माहेरघर आहे आणि जेथे विविध प्रकारच्या सज्जनांचा निवास आहे, अशा विज्जडवीड या गावी, शाण्डिल्यगोत्रोत्पन्न, लोकमान्य, श्रौत व स्मार्त धर्मनियमात निपुण, सर्व विद्यांचा मुकुटमणी समस्त शास्त्रांचा शिरोमणी महेश्वर नावाचा ब्राह्मण रहात होता.

भास्कराने ह्या सिद्धांताची रचना कमलवत् पादयुगुल असलेल्या आपल्या पित्याच्या (महेश्वराच्या) आशिर्वादाने केली. त्याचा सिद्धांत अशिक्षित लोकांना मार्गदर्शक होईल. बुद्धिमान खगोलविदांचा आनंद द्विगुणीत करील. हा ग्रंथ सोप्या, अलंकारिक भाषेने आणि सिद्धांतांनी ओतप्रोत भरलेला आहे. हा ग्रंथ विद्वानांना सहज समजण्यासारखा असून चुकिच्या कल्पना दूर करणार आहे.

भास्कराचार्यांनी आपल्या ग्रंथाचे केलेले आत्मविश्वासयुक्त वर्णन यथोचित आहे यात शंकाच नाही. खगोलशास्त्रासकट इतर सर्व शास्त्रांचे ज्ञान त्यांनी आपल्या पित्यापासून मिळविले यातही काही संदेह राहत नाही. परंतू वरील श्लोकावरून एक महत्वाचा प्रश्न उपस्थित होतो, तो असा की, भास्कराचार्यांचे निवासस्थान असलेले हे विज्जडवीड हे नेमके कोणते गाव आहे आणि ते कुठे होते? आज अशा नावाचे गाव सह्याद्रीच्या आसपास आढळत नाही. वरील श्लोकावरून मात्र ते सह्यपर्वताच्या कुशीतच कुठेतरी असले पाहिजे. त्या गावात विद्यादानाचेही कार्य मोठ्या प्रमाणात होत असावे.

विज्जडवीड गावाबद्दल आजपर्यंत पुष्कळ तर्कवितर्क करण्यात आले आहेत. अजूनही या प्रश्नाचे उत्तर अनिर्णित आहे. विज्जडवीड या शब्दातील पहिली तीन अक्षरे नष्ट झाली व शेवटच्या दोन अक्षरांचा बीड असा अपभ्रंश झाला असे समजून मराठवाड्यातील बीड हेच विज्जडवीड असावे असा काही लोकांचा तर्क आहे, पण तो बरोबर नाही त्याचे एकच कारण असे की आधुनिक बीड सह्यपर्वताजवळ नाही. अकबर बादशहाच्या आज्ञेवरून फैजी नावाच्या कवीने इसवी सन् १५८७ साली लीलावतीचे पर्शियन भाषेत भाषांतर केले होते. त्यामध्ये त्याने भास्कराचार्य बेदरचा रहाणार होता असे लिहिले आहे. पण हैंद्राबादजवळ असलेले बेदरही सह्याद्रीपासून अतिशय दूर आहे, त्यामुळे हे गावही भास्कराचार्यांचे निवासस्थान म्हणून बाद ठरते. विज्जडवीड हे विजापूर असावे असा एक तर्क आहे पण विजापूर हा विजयपूर किंवा विद्यापूर या शब्दाचा अपभ्रंश होण्याची शक्यता आहे. विज्जडवीडचा नव्हे. तसेच विजापूरही सह्याद्रीपासून किमान १५० किलोमीटर दूर आहे.

इसवी सन १५५० च्या आसपास नृसिंह दैवज्ञ होऊन गेला. त्याने लीलावतीवर वासनावार्तिक नावाचा टीका ग्रंथ लिहिला आहे. त्यामध्ये त्याने भास्कराचार्यांचे वर्णन पुढीलप्रमाणे केले आहे,

'विज्जडवीड निवासी पवित्रितदंडकारण्यः महाराष्ट्रनामाश्रयो महेश्वरनंदन. भास्कराचार्यः'

याचा अर्थ भास्कराचार्य महाराष्ट्रातील दंडकारण्यात रहाणारे होते, असा होतो. त्यानंतर इसवी सन १६०० च्या आसपास होऊन गेलेल्या मुनीश्वराने लिलावतीवर मरीचिका नावाची टीका लिहिली. त्यामध्ये विज्जडवीडचा उल्लेख असा आहे.

'सह्यकुलपर्वतान्तर्गत भूप्रदेशे महाराष्ट्रदेशान्तरर्गत विदर्भापर पर्याय विराट देशादपि निकटे गोदावर्यां नातिदूरे पंचक्रोशांतरे विज्जडवीडम्'

या वर्णनावरून, विज्जडवीड हे गाव गोदावरीपासून फार लांब नसावे, ते गोदावरीच्या पंचक्रोशीत तिच्या उत्तरेला सह्यपर्वताच्या रांगेत पण विदर्भाच्या अलिकडे असावे. चाळिसगाव पासून १६ किलोमीटर अंतरावर पाटण नावाचे एक गाव आहे. तेच विज्जडवीड असावे अशी दाट शंका आहे. ह्या गावी असलेल्या सारजादेवीच्या मंदिरात दानपत्रासंबंधी एक शिलालेख सापडला आहे. त्याप्रमाणे त्याकाळच्या कृष्णराज, इंद्रराज गोवन व सूर्यदिव या सूर्यवंशीय विद्वानांच्या चहात्या राजांनी मठ (विद्यालये) चालविणाऱ्या गुरूंना दाने दिल्याचे उल्लेख आहेत. त्यामध्ये भास्कराचार्यांचा नातू चंगदेव याला शाळा चालविण्यासाठी पाटण येथे दाने दिल्याचे लिहिले आहे. परंतु या शिलालेखावरून पाटण हेच पूर्वीचे विज्जडवीड हे सिद्ध होत नाही. कदाचित् भास्कराचार्यांचे वंशज विज्जडवीड हे गाव सोडून पाटण या गावी स्थाइक झाले असावेत. अर्थातच विज्जडवीड हे नेमके कोठे होते हा प्रश्न अजूनही अनिर्णित आहे, असे समजायला हरकत नाही.

लीलावती ग्रंथातील शेवटचा श्लोक आणि बीजगणितातील आत्मनिवेदन पर श्लोक यावरून भास्कराचार्यांच्या शिक्षणाचा थोडाफार अंदाज आपल्याला बांधता येईल. लिलावतीमधील शेवटचा श्लोक असा आहे,

अष्टौ व्याकरणानि षट्च भिषजां व्याचष्ट ताः संहिताः
षट् तर्कान् गणितानि पंच चतुरो वेदान अधीते स्म यः
रत्नांना त्रितयं द्वयं च बुबुधे मीमांसयोः अंतरे
सद्ब्रह्मैकम् अगाधबोध महिमा सो ऽ स्याः कविर्भास्करः

आठ व्याकरणे, सहा वैद्यक संहिता, सहा न्यायशास्त्रे, पाच गणितग्रंथ, चार वेद, तीन अधिक दोन अशी पाच भरतशास्त्रे, दोन मीमांसा, ही ज्याने आत्मसात केली

होती, जगात सच्चिदानंदरूपी एकाच परमब्रह्माचा महिमा न समजण्या इतका अगाध आहे, असे जो मानित असे, तो कविवर्य भास्कर या ग्रंथाचा कर्ता आहे.

बीजगणिताचा समारोप करताना भास्कराचार्य लिहितात :

आसीत् महेश्वर इति प्रथितः पृथिव्याम्
आचार्यवर्यपदवीं विदुषां प्रपन्नः
लब्ध्यावबोधकलिकां तत एव चक्रे
तज्जेन बीजगणितं लघुभास्करेण

विद्वान लोकांकडून आचार्यवर्य अशी पदवी प्राप्त झालेले महेश्वर नावाचे या पृथ्वीवर प्रख्यात होतो. त्यांच्यापासूनच मला ज्ञानकलिका मिळाली. त्यांचेजवळ बीजगणिताचे पाठ घेऊन भास्कराने बीजगणित हा ग्रंथ लिहिला.

वरील श्लोकांवरून आपल्याला भास्कराचार्यांच्या शिक्षणासंबंधी जी माहिती मिळते ती अतीशय महत्वाची आहे. भास्कराचार्य कुशाग्र बुद्धीचे व वेद विद्या पारंगत होतेच, पण त्यांचे वडीलही अतिशय उच्च दर्जाचे विद्वान होते. विज्ञान लोकांनीच त्यांना आचार्य ही पदवी बहाल केली होती. भास्कराचार्यांच्या घराण्यात पिढ्यान् पिढ्या विद्येची उपासना चालत असावी. पाटण येथे मिळालेल्या शिलालेखावरून ही गोष्ट सिद्ध होते. भास्कराचार्य हे केवळ गणित व खगोलशास्त्र ह्या विषयातच निष्णात होते असेही नाही. त्यांनी भारतीय विद्यांच्या अनेक उपांगांचा सखोल अभ्यास केला होता. विशेषतः भास्कराचार्य स्वतःला कवी म्हणवितात. आधुनिक काळात गणित आणि काव्य ह्यांचा बहुधा छत्तिसाचा आकडा असतो. अलिकडे गणित आणि काव्य दोन्ही दुर्बोध होत चालल्या आहेत. अशा पार्श्वभूमीवर काव्यात्म गणित लिहून ते लोकप्रिय करण्याचा भास्कराचार्यांनी आठशे वर्षांपूर्वी केलेला उद्योग डोळ्यात भरल्याशिवाय रहात नाही.

***

२



ग्रंथकार भास्कराचार्य

मोजकीच पुस्तके लिहून जे ग्रंथकार अजरामर झाले त्यामध्ये भास्कराचार्यांचा अवश्य उल्लेख करावा लागेल. भास्कराचार्यांनंतर सुमारे १०० वर्षांनी महाराष्ट्रात संतशिरोमणी ज्ञानेश्वर झाले. त्यांच्या ज्ञानेश्वरी ह्या अलौकिक ग्रंथाची पारायणे करणारे सहस्त्रावधी लोक आजही महाराष्ट्रात विद्यमान आहेत. भास्कराचार्यांचा विषय सामान्य लोकांच्या कक्षेत बसणार नव्हता. त्यामुळे त्यांच्या ग्रंथाचे अध्ययन केवळ विद्वानांपुरतेच मर्यादित राहिले. पण भास्कराचार्यांचे लीलावती आणि बीजगणित हे दोन ग्रंथ किमान ५०० वर्षे आसेतू हिमालय पाठ्यपुस्तके म्हणून वापरले जात होते ही वस्तुस्थिती आहे. पुढे इंग्रजांचे राज्य आल्यावर त्यांनी आपल्या देशात पाश्चात्य शिक्षणपद्धती आणली. त्यानंतरच भास्कराचार्यांचे हे दोन ग्रंथ मागे पडले.

भास्कराचार्यांच्या ग्रंथांची जगातील प्रमूख भाषांमध्ये भाषांतरे झाली आहेत. इ.स. १५८७ साली अकबर बादशहाच्या आज्ञेवरून फैजी नावाच्या त्याच्या पदरी असलेल्या एका कवीने लीलावतीचे पर्शियन भाषेत भाषांतर केले. पुढे १६३४ साली शहाजहानच्या दरबारातील अताउल्ला रसीदी या ज्योतिषाने बीजगणिताचे फारसी भाषेत भाषांतर केले. १८१३ साली स्ट्राची याने त्याचे इंग्रजीत भाषांतर केले. त्यानंतर १८१६ आणि १८१७ साली अनुक्रमाने जेम्स टेलर आणि आणि कोलब्रुक यांनी लीलावतीला इंग्रजी रूप दिले. पुढे सिद्धांतशिरोमणी हा ग्रंथही इंग्रजी भाषेत

प्रसिद्ध झाला. आजपर्यंत सिद्धांतशिरोमणीवर जेवढे टीकाग्रंथ प्रसिद्ध झाले आहेत तेवढे क्वचितच दुसऱ्या खगोलशास्त्रीय ग्रंथावर झाले असतील.

भास्कराचार्यांचा सर्वात प्रसिद्ध ग्रंथ आहे सिद्धांतशिरोमणी, वस्तुतः लीलावती, बीजगणित, गणिताध्याय आणि गोलाध्याय असे त्या ग्रंथाचे चार भाग आहेत. अनेकदा त्यांचा स्वतंत्र ग्रंथ म्हणूनही उल्लेख केला जातो. सिद्धांतशिरोमणीशिवाय भास्कराचार्यांनी करणकुतुहल, सर्वतोभद्रयंत्र, वसिष्ठतुल्य आणि विवाहपटल या नावाचे आणखी चार ग्रंथ लिहिले होते, पण या ग्रंथांच्या मूळ संहिता आता सापडत नाहीत त्यांच्या हस्तलिखित नकला मात्र आज उपलब्ध आहेत.

सिद्धांतशिरोमणी हा भास्कराचार्यांचा ग्रंथ ब्राह्मस्फुट सिद्धांत ह्या ब्रह्मगुप्ताच्या ग्रंथावर बेतलेला आहे. त्याशिवाय लल्लाचा श्रीवृद्धिदतंत्र हा ग्रंथही भास्कराचार्यांनी आधार म्हणून घेतलेला दिसतो. ह्या ग्रंथांमधील काही दोषही आचार्यांनी आपल्या ग्रंथात दाखवून ते दुरूस्त केले आहेत. अतिशय क्लिष्ट विषय सोपा करून दाखविण्याचे कसब गणनाच्या अत्यंत सुलभ पद्धती, आणि सिद्धांतांच्या उपपत्तींचे विवेचन यामुळे सिद्धांतशिरोमणी अत्यंत उत्कृष्ट ग्रंथ झाला आहे. ह्या एकाच ग्रंथाचे अध्ययन केले तरी साऱ्या प्राचीन भारतीय ज्योतिषशास्त्राची सम्यक कल्पना येईल. पहिल्या आर्यभटापासून भास्कराचार्यांपर्यंतच्या ६०० वर्षांच्या काळात भारतीय खगोलशास्त्र पूर्णपणे विकसित झाले. ह्याच काळात मुस्लिम खलिफांनी भारतीय ज्योतिषी अरबस्तानात नेले आणि हिंदू खगोलशास्त्रीय आणि गणिती ग्रंथांची अरबी आणि लॅटीन भाषेत भाषांतरे झाली.

खगोलशास्त्र शिकायचे असेल तर गणिताचा पाया मजबूत हवा. त्यासाठीच भास्कराचार्यांनी लिलावती आणि बीजगणित या ग्रंथांची योजना केली आहे. हे दोन्ही ग्रंथ अत्यंत उच्च दर्जाचे आहेत त्यामुळे ८०० वर्षांनंतर अजूनही ते टवटवीत वाटतात. विषयांची पद्धतशीर आणि उत्कृष्ट मांडणी हा या ग्रंथांचा विशेष आहे. ह्या ग्रंथांची भाषाही मोठी लालित्यपूर्ण आहे. वयाच्या ६९ व्या वर्षी म्हणजे इ.स. ११८३ साली भास्कराचार्यांनी करणकुतुहल हा ग्रंथ लिहिला. इतक्या उतार वयातही त्यांचा उत्साह कायम होता आणि बुद्धि सतेज होती.

भास्कराचार्यांना आपल्या ग्रंथांबद्दल सार्थ अभिमान वाटत असे तो विविध ग्रंथात प्रगट झाला आहे. गोलाध्यायाच्या पंधराव्या अध्यायात ते लिहितात,

'अरे विद्वान गृहस्था! तुला खगोलशास्त्र ऐकण्याची इच्छा असेल तर भास्कराचार्यांचा ग्रंथ ऐक. तो संक्षिप्त नाही आणि उगाचच अघळपघळ विस्ताराने लिहिलेला नाही. त्यामध्ये शास्त्रीय तत्त्वांचा उहापोह आहे. सुंदर सुंदर सुभाषिते आहेत आणि मनोरम प्रश्नही आहेत. अगदी सहजपणे तो समजू शकतो आणि पंडितांच्या सभेमध्ये ऐकविण्यात आपले पांडित्य प्रगट होते.

बीजगणित ग्रंथाची समाप्ती आचार्यांनी पुढील शब्दात केली आहे.

'गणकांच्या कहाण्यांनी रमणीय असलेला, बालकांनाही समजण्यास सुलभ, सर्व गणितांच्या उपपत्तींचे सार असणारा सर्वगुणसंपन्न तसेच सर्वदोषरहित असलेल्या ह्या छोट्या बीजगणित ग्रंथाचे बुद्धिच्या वृद्धिसाठी आणि प्रौढत्वासाठी अध्ययन करा, अवश्य अध्ययन करा.

भास्कराचार्य हे केवळ सैद्धांतिक खगोलशास्त्रज्ञ होते. त्यांना प्रत्यक्ष वेधांमध्ये फारसा रस नव्हता असे म्हटले जाते. पण या आरोपात फारसे तथ्य दिसत नाही कारण गोलाध्यायामध्ये यंत्राध्याय हे एक स्वतंत्र प्रकरण आहे. त्यामध्ये विविध प्रकारच्या ९ यंत्रांची भास्कराचार्यांनी चर्चा केली आहे. अर्थात् ही यंत्रे आजच्यासारखी अत्याधुनिक आणि अगडबंब नव्हती. अगदी साध्या उपकरणांचा उपयोग करून त्या काळी वेध घेतले जात असत. अर्थात भास्कराचार्यांनी प्रत्यक्ष वेधांनी ग्रहांची स्थाने निश्चित केली असतील तर त्यांचा उल्लेख मात्र त्यांच्या ग्रंथात नाही. वेधांसाठी त्यांनी ब्राह्मस्फुट सिद्धांतावर जास्त भरवसा ठेवल्याचे दिसते.

***

३

बीजगणिताच्या उपसंहारात व्यक्त झालेले मनोगत

सिद्धांतशिरोमणीच्या अंतर्गत असलेल्या लीलावती, बीजगणित, गणिताध्याय आणि गोलाध्याय या चार ग्रंथापैकी बीजगणिताच्या समारोपात भास्कराचार्यांनी आपले मनोगत व्यक्त केले आहे. पुढे दिलेला त्याचा स्वैर अनुवाद वाचकांना भास्कराचार्यांच्या व्यक्तिमत्वाची अंधुकशी कल्पना देऊ शकेल.

'विद्वानांनी आचार्यवर्य अशी पदवी देऊन गौरविलेला आणि आपल्या बुद्धिमत्तेसाठी पृथ्वीवर सुप्रसिद्ध असलेला असा महेश्वर नावाचा पंडित होता. भास्कर नावाच्या त्याच्या पुत्राने आपल्या नामवंत पित्यापासून ज्ञानकलिका आत्मसात करून हा बीजगणितावरील लहानसा ग्रंथ लिहिला.

'बीजगणितावर ब्रह्मबीज, श्रीधर बीज व पद्मनाभ बीज हे ग्रंथ आहेत. परंतू ते विस्तृत असल्यामुळे विद्यार्थ्यांचे समाधान होत नाही. त्यांना संतोष व्हावा म्हणून वरील ग्रंथांमधील उत्तम भाग काढून त्यांना अभिनव कल्पनांची जोड देऊन. हा बीजगणिताचा लघुग्रंथ मी सजविला आहे.'

'प्रस्तुत ग्रंथात उदाहरंणे सोडविण्याच्या पद्धति आणि प्रत्यक्ष उदाहरणे मिळून अनुष्टुप मात्रातील संख्या एक सहस्त्र आहे. त्यामध्ये कुठे सूत्रांच्या अर्थांचा विचार, कुठे त्यांची व्याप्ती, कुठे कल्पनाभेद व कुठे युक्ती यांचा अविष्कार केला आहे. ह्यावरून ग्रंथलाघव केवढ्या प्रमाणात झाले हे सहज लक्षात येईल.'

'उदाहरणे अक्षरशः अनंत आहेत त्यांचा विचार करून ग्रंथाचा विस्तार करायचा म्हटलं तर तो अतिविशाल गणिती सागर सामान्य कुवतीच्या लोकांना तरून जाणे कठीण होईल. बुद्धिमान लोकांना तर इतक्या शास्त्रविस्ताराची मुळीच आवश्यकता नाही. हा लघु बीजगणिताचा उपक्रम केवळ त्यासाठीच!'

'ज्यामध्ये उपदेशाचा अंश आहे असे शास्त्र बुद्धिमान व्यक्तिला मिळाले की ते शास्त्र स्वतःच विस्तारत जाते. ज्याप्रमाणे पाण्यामध्ये तेलाचा थेंब टाकला की तो

स्वतःच्या शक्तीने विस्तारत जातो, मूर्ख मनुष्याजवळ असलेली गुप्त गोष्ट आणि सत्पात्री दान ह्यांचाही ज्याप्रमाणे विस्तार होतो तद्वत प्रज्ञावान व्यक्तीच्या जवळ असणारे शास्त्र स्वतःच्या निहीत शक्तीने विकास पावते, म्हणून शास्त्र थोडक्यात सांगणे हे उत्तम !'

'रम्य शब्दांनी ओथंबलेल्या, सहज आकलन होणाऱ्या, सकल गणिताचे सार असणाऱ्या, उपपत्ती प्रकारांनी युक्त, विविध गुण संपन्न, दोषमुक्त अशा मी लिहिलेल्या ह्या लघु बीजगणिताचा बुद्धीच्या विकासासाठी आणि प्रौढत्वाच्या प्राप्ती प्रित्यर्थ अवश्य अभ्यास करा.'

बीजगणिताच्या ह्या उपसंहारावरून काही गोष्टी स्पष्ट होतात.

★ भास्कराचार्यांना आपल्या पित्याच्या विद्वतेचा सार्थ अभिमान होता असे दिसते. पित्याकडून आपण फारच अत्यल्प ज्ञान संपादन करू शकलो असे भास्कराचार्यांना वाटते त्यामुळेच त्यांनी ज्ञानकलिका असा शब्द वापरला आहे. त्या काळात त्यांच्या पित्याला भारतवर्षात विद्वन् मान्यता मिळाली असे वाटते.

★ भास्कराचार्यांच्या आधी बीजगणितावरील जाडजूड ग्रंथ प्रचारात असावेत. त्यापैकी तीनच ग्रंथाची नावे भास्कराचार्यांनी दिली आहेत. त्या ग्रंथांच्या विस्तारामुळे त्याकाळातील विद्यार्थ्यांमध्ये त्यांच्या बद्दल अप्रीती निर्माण झाली असावी. सदरहू ग्रंथांमधील उत्तम भाग घेऊन आणि त्याला चमत्कृतीपूर्ण कल्पनांची जोड देऊन भास्कराचार्यांनी आपला ग्रंथ सुटसुटीत केला असावा.

★ प्रस्तुत ग्रंथात अनुष्टुप मानाचे १००० श्लोक आहेत असे भास्कराचार्य म्हणतात पण प्रत्यक्षात बीजगणितात तेवढी श्लोक संख्या दिसत नाही. एवढेच काय तेवढ्या ओळीसुद्धा नाहीत. त्यामुळे अशी शंका येते की भास्कराचार्यांच्या बीजगणिताचा काही भाग नष्ट झाला असावा.

★ बुद्धिवान व्यक्तीच्या हातात एखादे शास्त्र पडले की त्याचा विस्तार होतो असे भास्कराचार्य म्हणतात. याचा अर्थ बुद्धिवान व्यक्तींनी विशेष अभ्यास करून किंवा संशोधन करून भर घालावी असा होतो.

★ बुद्धीचा विकास आणि प्रौढत्व प्राप्त करून घेण्यासाठी बीजगणिताचा अभ्यास करावा असे सरतेशेवटी भास्कराचार्य सुचवीत आहेत. प्रौढत्व प्राप्ती ह्याचा अर्थ आपल्या अंगातील बालिशपणा जाऊन समंजसपणा निर्माण व्हावा, असा होतो काय ?

सिद्धांतशिरोमणीचा समारोप करताना भास्कराचार्यांनी भावपूर्ण शब्दा आपले हृदगत व्यक्त केले आहे, ते लिहितात.

'कुशवृक्षाचे पाते ज्याप्रमाणे मुळापासून शिरोभागापर्यंत जसे उत्तरोत्तर तीक्ष्ण होत जाते, त्याप्रमाणे अतिशय सुक्ष्म आणि तीक्ष्ण बुद्धि, विषयाचा भेद करून त्यात प्रवेश करते, हेच ग्रहगणिताच्या रचनेचे वैशिष्ट्य आहे. अशा बुद्धिचा वापर करताना ग्रहगणित सिद्धांत ग्रंथाच्या रचनात्मक प्रबंधात माझ्याकडून काही चांगले वाईट उद्‌गार निघाले असतील, तसेच माझ्याकडून काही मर्यादाभंग झाला असेल तर त्याबद्दल विद्वानांची मी क्षमायाचना मागतो.'

'या सिद्धांतग्रंथाच्या रचनाकालात राष्ट्रामध्ये वर्तमानकाळी उपस्थित असलेल्या सर्व लहान थोर गणितज्ञ किंवा भूतकाळात जे ग्रहगणिती झाले त्या सर्वांना माझी होत जोडून नम्र प्रार्थना आहे की मी पूर्वाचार्यांपैकी ब्रह्मगुप्त आणि लल्लाचार्य यांच्या सदोष उपपत्तींबद्दल जी टीका केली व धृष्टता दाखविली त्या सर्व आचार्यांची मी क्षमा मागतो.'

'पूर्वाचार्यांनी दिलेल्या उपपत्तीमध्ये कित्येक ठिकाणी निर्माण झालेल्या त्रुटींचा उल्लेख केल्याशिवाय उपपत्तींवर पूर्ण विश्वास बसत नाही. म्हणून दोषांचे प्रगटीकरण करताना ठिकठिकाणी पूर्वाचार्यांनी जे मूलभूत आणि बरोबर सिद्धांत मांडले त्यांचे आपोआप दर्शन होते. वस्तुतः हा ग्रंथ, ही पूर्वाचार्यांचीच देणगी आहे, त्यांनी मला क्षमा करावी अशी प्रार्थना आहे.'

***

४



लीलावती कोण होती?

भास्कराचार्यांच्या सर्व ग्रंथात लोकप्रियतेचा मान मिळाला तो लीलावती ह्या ग्रंथाला. सामान्य माणसाला खगोलशास्त्राच्या ज्ञानाची फारशी आवश्यकता वाटत नसली तरी दैनंदिन व्यवहारासाठी अंकगणिताची मात्र फार आवश्यकता वाटते. लीलावती हा ग्रंथ तर व्यवहारिक उदाहरणांनी ओतप्रोत भरलेला आहे. किमान ५०० ते ६०० वर्ष साऱ्या हिंदुस्तानात विद्यार्थ्यांना अंकगणित शिकविण्यासाठी हा ग्रंथ पाठ्यपुस्तक म्हणून वापरला जात होता. लीलावती ग्रंथाची एकूण मांडणी, त्यामधील हसत खेळत गणित शिकविण्याची आकर्षक पद्धत, मनोरंजक उदाहरणे आणि काव्यात्मक रचना, या विविध गुणांमुळे हा ग्रंथ हिंदुस्तानातील सुशिक्षित जनसामान्यांपर्यंत जाऊन पोहोचला. परंतू ह्या ग्रंथाला भास्कराचार्यांनी लीलावती हेच नाव का दिले? ही लीलावती कोण? यांची दुर्दैवी मुलगी की सुदैवी पत्नी? ह्या प्रश्नाचा अजूनही उलगडा झालेला नाही. अर्थातच लीलावती या नावावरून अनेक दंतकथा प्रसृत झाल्या.

लीलावती ह्या ग्रंथाचा समारोप करताना भास्कराचार्यांनी एक द्व्यर्थी श्लोक लिहिला आहे, तो असा :

येषां सुजाति गुण वर्ग विभूषितांगी।

शुद्धाः अखिल-व्यवहृतिः खलु कंठसक्ता।।
लीलावतीह सरसोक्तिम् उदाहरन्ती।
तेषां सदैव सुखसंपदः उपैति वृद्धिम्।।

ह्या श्लोकाचा एक अर्थ असा आहे, जिच्यात, जाति, अपूर्णांक, गुणाकार वगैरे गोष्टी उत्तम प्रकार वर्णन केल्या आहेत, जिच्यात सर्व व्यवहार प्रकरणे स्पष्टरूपाने मांडलेली आहेत. जिच्यामधील नियम शुद्ध आहेत व जिच्यातील उदाहरणे सरस भाषेत सांगितली आहेत, अशी लीलावती ज्यांना कंठगत होईल, त्यांची सुख व संपत्ती सतत वृद्धिंगत होईल.

ह्याच श्लोकाचा अर्थ असाही लावता येतो, जिचा जन्म शुद्ध कुळात झाला आहे, गुणिजनांच्या समूहात जी शोभून दिसते, सर्व व्यवहारात जी निर्मळ आहे, जी उत्तम वाक्प्रचार व म्हणींची उदाहरणे देऊ शकते अशी (माझी कन्या) लीलावती ज्याला वरील, त्याच्या घरी सुख व संपत्ती नेहमीच वृद्धिंगत होईल.

ह्या दोन अर्थांपेकी भास्कराचार्यांना नेमका कोणता अर्थ अपेक्षित होता काही कळत नाही. पण दुसऱ्या अर्थावरून असे वाटते की लीलावती ही त्यांची कन्या असावी. लीलावतीमध्ये बाले, बालकुरंगलोलनयने (हरिणाच्या पाडसाच्या डोळ्यांप्रमाणे लाडिक डोळे असलेली), चंचलाक्षी विमलां बाले, कान्ते, मृगनयने वगैरे युवतीला उद्देशून केलेली संबोधने आढळतात. परंतू त्याच ग्रंथात वत्स, सखे, गणकोत्तम, कोविद, नंदन वगैरे युवकाला उद्देशून केलेली संबोधनेही आहेत. त्यामुळे अधिकच गोंधळ उडतो. कदाचित भास्कराचार्यांनी चालविलेल्या पाठशाळेत इतर मुलांबरोबर त्यांची कन्याही शिक्षण घेत असेल. लीलावतीचे परीक्षण केल्यावर असे लक्षात येते की प्रारंभीचे काही सोपे प्रश्न तिला उद्देशून विचारल्यासारखे वाटतात. विषय अवघड झाल्यानंतर लीलावतीला उद्देशून विचारलेला एकही प्रश्न नाही. याशिवाय लीलावती ग्रंथात शृंगाराचा आधार घेऊन काही गणिते दिली आहेत. आपल्या मुलीला किंवा इतर विद्यार्थ्यांनाही अशाप्रकारची गणिते भास्कराचार्य विचारतील असे वाटत नाही. एकंदरित पुराव्यांवरून असे वाटते की लीलावती नावाची व्यक्ती अस्तित्वात नसावी. आपल्या ग्रंथाला कवी मनाच्या भास्कराचार्यांनी लीलावती हे काव्यात्मक आणि अलंकारात्मक नाव दिले असावे. तरीही कुतुहल म्हणून लीलावती या नावाभोवती निर्माण झालेल्या दंतकथा काय आहेत हे पहायला हरकत नाही.

पहिली दंतकथा.

लीलावती ही भास्कराचार्यांची पत्नी होती. दीर्घकाळ पर्यंत त्या दांपत्याला पुत्रलाभ झाला नाही. त्यामुळे लीलावतीला आपले जीवन निरस वाटू लागले. तिच्या मनाला काहीतरी विरंगुळा असावा म्हणून भास्कराचार्यांनी तिला गणित शिकविले.

उत्तर भारतात ही आख्याइतका प्रचलीत आहे. परंतू ही आख्याइका विश्वासार्ह वाटत नाही. एक तर भास्कराचार्यांना पौत्र, प्रपौत्र असल्याचा पुरावा सापडला आहे. तसेच पत्नीला गणित शिकविताना तिला उद्देशून बाले, मृगनयने असे शब्द वापरणे जरा विचित्र वाटते अगदी तरूण युवतीसाठीच असे शब्द वापरले जात असत. तसेच विरंगुळा म्हणून गणितासारखा रुक्ष विषय आपल्या पत्नीला शिकविणे हेही संभवनीय वाटत नाही.

दुसरी दंतकथा

भास्कराचार्यांना एकुलती एक मुलगी होती. तिचं नाव लीलावती. लीलावती मोठी गोड, हसरी आणि खेळकर होती. अर्थात भास्कराचार्यांची ती अतिशय लाडकी होती. कन्या उपवर झाली की साऱ्याच वडील मंडळींची धावपळ चालू होते. वधुवरांच्या कुडल्या मांडल्या जातात, भविष्य पाहिलं जातं. छत्तिस गुणांपैकी किती गुणांचा ताळमेळ बसतो ह्याचा हिशोब केला जातो. भास्कराचार्य तर निष्णात ज्योतिषी होते. लीलावतीच्या भाग्यात काय आहे, तिला सुयोग्य स्थळ मिळेल की नाही, हे पहाण्यासाठी त्यांनी आपल्या कन्येची कुंडली मांडली. तिच्या कुंडलीमधील सप्त स्थानाच्या दिशेने क्रूर नजर टाकणारे ग्रह पाहून भास्कराचार्यही क्षणभर सुन्न झाले. लग्नानंतर काही वर्षातच मुलीला वैधव्ययोग येईल असं भीषण भविष्य पाहून त्यांना काय करावं सुचेचना. कुंडलीतील ग्रहांनी मात्र त्या भविष्यात एक पळवाट ठेवली होती. लीलावतीचा विवाह एका विशिष्ट शुभमुहूर्तावर केला तर तिचं वैधव्य टळणार होतं.

भास्कराचार्यांनी मनाचा हिय्या करून तो शुभमुहूर्त गाठण्याचं निश्चित केलं. एक चुणचुणीत मुलगा आचार्यांनी पसंत केला. लीलावतीच्या आयुष्यातील तो विशिष्ट क्षण चुकू नये म्हणून त्यांनी लग्नातील विधीचं क्षणाक्षणाचं गणित मांडलं. विवाहाच्या आधी नववधूने गौरीहरपूजन करावं अशी आपल्याकडे प्रथा आहे. त्याप्रमाणे लीलावतीची पूजा चालू असताना तिला घटिकापत्राची आठवण झाली. तळाशी

लहानसं छिद्र असलेलं ते घटिकापात्र बाहेरच्या बाजूलाच पाण्याने भारलेल्या घंगाळात ठेवलेलं होतं. बालसुलभ स्वभावाला अनुसरून लीलावतीला वाटलं की ते घटिकापात्र नीट बुडत आहे की नाही ते पहावं. मनातील तीव्र इच्छेने गौरीहराची पूजा अर्धवट सोडून ती घटिकापात्राकडे धावली. अतिशय उत्सुकतेने हळू हळू घंगाळात बुडणाऱ्या त्या घटिकापात्राकडे वाकून पाहत असताना क्षणभर ती स्वतःलाच विसरली. त्याचवेळी तिच्या कपाळावर लावलेल्या कुंकुमयुक्त अक्षतांमधील एक तांदुळाचा दाणा निसटला आणि टपकन् घटिकापात्रात पडला. तांदुळाचा तो जड दाणा तात्काळ घटिकापात्राच्या तळाशी पोहोचला आणि त्याने त्या पात्राचं छिद्र बंद करून टाकलं. त्यामुळे घटिकापात्रात छिद्राद्वारे शिरणारं पाणी बंद झालं. लग्नाचा शुभमुहूर्त हुकला. लीलावतीचा विवाह झाला पण लवकरच तिला वैधव्य प्राप्त झालं. मोठ्या दुःखित अंतःकरणाने भास्कराचार्यांनी आपल्या लाडक्या कन्येला स्वगृही परत आणलं आणि तिचं भावी आयुष्य सत्कारणी लागवं म्हणून तिला गणित शिकवलं.

लीलावतीची ही दतंकथा नाट्यपूर्ण आहे यात शंकाच नाही पण ती ओढून ताणून बनविल्यासारखी वाटते. भविष्याचा अचुक अंदाज, कपाळावरील तांदुळाचा दाणा घटिकापात्रात पडून त्याचं छिद्र बंद होणं, वगैरे गोष्टी विश्वसनीय वाटत नाहीत. भास्कराचार्यांच्या ग्रंथांवर भाष्य करणाऱ्या अनेकांनी या कथेचा उल्लेख केलेला नाही. अर्थात ही दंतकथा असंभाव्य वाटते.

तिसरी दंतकथा

भास्कराचार्यांच्या पित्याचं नाव महेश्वर असं होतं. सर्व शास्त्रात निपुण असे ते प्रकांड पंडित होते. भास्कराचार्यांचं बरंचस शिक्षण पित्याच्या पायांजवळ बसूनच झालं. काही विशेष अध्ययन करण्यासाठी बालवयातील भास्कराचार्यांना काही काळ गुरूगृही रहाण्याचा प्रसंग आला. त्यांच्या गुरूला लीलावती नावाची एक मुलगी होती. आपल्या पित्याजवळ अध्ययन करण्यासाठी आलेल्या भास्कराची तैलबुद्धी, उमदा स्वभाव, सुंदर शरीरयष्टी, काव्यशक्ती, हजरजवाबीपणा या सर्व गुणांवर लुब्ध होऊन लीलावतींचं भास्करावर प्रेम बसलं.

एके दिवशी अध्ययन संपवून भास्कर स्वगृही जाण्यासाठी निघाला तेव्हा लीलावतीनं आपल्या मनातील हितगूज भास्कराला सांगितलं. खरं म्हणजे भास्करालाही सुलक्षणी लीलावती आवडली होती. पण काही झालं तरी लीलावती

गुरूकन्या होती. भारतीय संस्कृतीप्रमाणे गुरूकन्या म्हणजे गुरूभगिनी, आणि गुरूभगिनीबरोबर विवाह कसा करायचा? भास्कराच्या मनात असूनही त्यांचा नाइलाज होता. भास्कराने लीलावतीला शास्त्रवचन सांगून नम्र शब्दात आपला नकार कळविला, पण जाता जाता भास्करानं तिला एक वचन दिलं. 'तुझी आठवण मी कधीच विसरणार नाही, ती नेहमी ताजीतवानी टवटवीत रहावी म्हणून माझ्या पहिल्या ग्रंथाला मी तुझं नाव देईन.'

ही तिसरी दंतकथा थोडे तथ्य असल्यासारखी वाटते. पण भास्कराचार्यांनी काही अध्ययन गुरूगृही राहून केले असते तर तसा उल्लेख त्यांनी कुठेतरी केला असता. शिवाय लीलावती ग्रंथातील एका श्लोकात ते लिहितात, 'हे सुमते तू लीलावतीचा उत्तम जाणकार असशील तर निश्चयाने सांग पाहू, ७ व्यास असलेल्या वर्तुळाचे क्षेत्रफळ किती?, ७ व्यासाच्या गोलाचे पृष्ठफळ किती? आणि त्याच्या आतील भागाचे घनफळ किती? या श्लोकातील लीलावतीचा उत्तम जाणकार याचा अर्थ लीलावती हे स्त्रीचे नाव नसून, गणित ग्रंथाचे नाव आहे. त्यामुळे वरील सर्व दंतकथा कपोलकल्पित असाव्यात याबद्दल संदेह रहात नाही.

***

५



पूर्वाचार्य

वेदाङ्ग ज्योतिष हा बहुधा खगोलशास्त्रावरील सर्वात प्राचीन ग्रंथ असेल. ह्या ग्रंथाचा काळ इसवी सन पूर्व १५०० ते २५०० या मर्यादेत कितीही असू शकेल. दुर्दैवाची गोष्ट अशी की त्यानंतर इसवी सन ५०० पर्यंतच्या काळातील लिखित स्वरूपात असलेला एकही ज्योतिष ग्रंथ आज उपलब्ध नाही. आर्यभटीय हा पहिल्या आर्यभटाचा खगोलशास्त्रीय ग्रंथ भारतातील सर्वात प्राचीन लिखित ग्रंथ आहे.

मधल्या काळात ज्योतिष ग्रंथ झाले नाहीत असे नाही, पण आज मात्र त्यांचा पत्ता लागत नाही. खुद्द आर्यभटाने त्याला मिळालेले ज्ञान पूर्वासूरींपासून मिळाल्याचे स्पष्ट लिहिले आहे. आर्यभटपूर्व काळात पितामह, वसिष्ठ, रोमक, पुलिश आणि सूर्य असे पाच खगोलशास्त्रीय सिद्धांत ग्रंथ प्रसिद्ध होते, पण त्यांचे मूळ ग्रंथ आज सापडत नाहीत. या सर्व सिद्धांतांचे एकत्र विवरण वराह मिहिर याने आपल्या पंचसिद्धांतिका या ग्रंथात केले आहे. सूर्य सिद्धांत हा भारतात सर्वत्र मान्य असलेला ज्योतिष सिद्धांत ग्रंथ होता. शेकडो वर्षे त्याच ग्रंथाच्या आधाराने भारतीय पंचांगे तयार करण्यात येत असत. आज उपलब्ध असलेला सूर्य सिद्धांत मूळ सूर्य सिद्धांताची सुधारित आवृत्ती आहे. सूर्य सिद्धांताच्या ग्रंथकर्त्याने आपले नाव मुद्दाम दडवून ठेवल्याचे सांगण्यात येते, पण भारतीय परंपरेत नावाला फारसे महत्व दिले जात नसे. त्यामुळे पुढील सर्व ग्रंथकर्त्यांनी आपल्या नावाचा ग्रंथात कुठेतरी उल्लेख केला आहे, पण स्वतःबद्दल कुठेही माहिती सांगितलेली नाही.

भास्कराचार्यांच्या पूर्वी ज्यांनी ग्रंथरचना केली असे अनेक भारतीय खगोलशास्त्रज्ञ होऊन गेले. त्यापैकी आर्यभट, वराहमिहिर, श्रीषेण, ब्रह्मगुप्त, लल्ल, पद्‌मनाभ, श्रीधर, महादेव, बलभद्र, मुंजाल, द्वितीय आर्यभट, भटोत्पल, श्रीपती अशी अनेक नावे आज ज्ञात आहेत. त्या सर्वांच्या ग्रंथांचा विचार करणे आपल्याला शक्य होणार नाही. वरील सर्व आचार्यांमध्ये, आर्यभट, वराहामिहिर, ब्रह्मगुप्त, लल्ल हे सुप्रसिद्ध होते. त्यांच्या मतांचा भास्कराचार्यांनी आपल्या ग्रंथात उल्लेख केला आहे. काही ठिकाणी त्यांनी ब्रह्मगुप्ताची मते खोडून काढली आहेत. पण ब्रह्मगुप्ताला अनुसरून आपला ग्रंथ लिहिल्याचेही त्यांनी मान्य केले आहे. वरील चार आचार्यांच्या कामगिरीचा ओझरता परिचय करून घेणे अस्थानी होणार नाही. कारण भास्कराचार्यांच्या सिद्धांत शिरोमणीला त्यांचे ग्रंथ मार्गदर्शक झाले आहेत.

आर्यभट :

आपला जन्म केव्हा झाला आणि आपण कुठे रहात होतो, या दोन गोष्टी आर्यभटाने आपल्या ग्रंथात स्पष्टपणे नमूद करून ठेवल्या आहेत. आर्यभटीय या ग्रंथाच्या कालक्रियापद या विभागात तो लिहितो 'तीन युगपाद म्हणजे कृत, त्रेता आणि द्वापार व ६० संवत्सरांच्या ६० आवृत्या संपल्या त्यावेळी माझ्या वयाची २३ वर्षे पूर्ण झाली होती. ६० संवत्सरांच्या ६० आवृत्या ह्याचा अर्थ

६०×६० = ३६०० वर्षे. इसवी सन पूर्व ३१७९ साली कलियुगाचा प्रारंभ झाला असे आपल्याकडे मानले जात त्यामुळे ३६००-३१७९ = ४२१ वर्षे येतात. शके ४२१ साली आर्यभट २३ वर्षांचा होता म्हणजे त्याचा जन्म शके ३९८ साली झाला असला पाहिजे. ह्याचा अर्थ इसवी सन ४७६ हे आर्यभटाच्या जन्माचे वर्ष आहे.

'कुसुमपूर येथे मिळविलेल्या ज्ञानाचे मी येथे विवेचन करीत आहे' असे आर्यभटाने गणितपाद या विभागात म्हटले आहे. कुसुमपूर म्हणजे पूर्वीचे पाटलीपुत्र किंवा आजचे पाटणा. आर्यभटाच्या काळी पाटण्याजवळच नालंदाचे विश्वविख्यात विद्यापीठ होते. कदाचित त्याच ठिकाणी आर्यभटाने ज्योतिषशास्त्राचे ज्ञान मिळविले असावे. त्याच विद्यापीठाचा तो कुलगुरू असण्याचीही शक्यता आहे कारण तसा एक अस्पष्ट उल्लेख इतरत्र सापडतो.

आर्यभटीय या ग्रंथात एकंदर फक्त १२१ श्लोक आहेत. आणि ते चार खंडात विभागले आहेत. गीतिकापाद, गणितापाद, कालक्रिया पाद आणि गोलपाद, अशी त्यांची नावे आहेत. आज ह्या ग्रंथातील सर्व श्लोकांचे पूर्ण विवेचन करून नवीन ग्रंथ लिहायचा झाला तर तो शेकडो पृष्ठांचा होईल. आर्यभटाने आपल्या ग्रंथात कुठेही शक किंवा संवत् या कालगणनेचा उल्लेख केलेला नाही. त्यामुळे या कालगणना त्याच्या काळात प्रचारात आल्या नसाव्यात. आर्यभटीय हा ग्रंथ काव्यात्मक असल्यामुळे त्यामध्ये संख्या लिहिण्यासाठी अक्षराचा उपयोग करण्यात आला आहे. अशा प्रकारचा तो पहिलाच प्रयत्न होता. त्यामुळे मोठमोठ्या संख्या सुटसुटीतपणे लिहिता आल्या. आर्यभटाची संख्या लिहिण्याची ती पद्धत अपूर्व होती. उदाहरणार्थ, ख्युघृ या शब्दाचा आर्यभटीय संख्या लिहिण्याच्या पद्धतीत अर्थ होतो ४,३२,०००

वर्तुळाचा परीघ आणि व्यास यांच्या गुणोत्तराला खगोलशास्त्रात फार महत्व आहे. ह्या गुणोत्तराचे आधुनिक नाव आहे 'पाय' चार दशांशापर्यंत पायची अचुक किंमत देणारा आर्यभट हा पहिला गणिती आहे. २०,००० व्यास असलेल्या वर्तुळाचा परीघ ६२८३२ असतो असे त्याने लिहिले आहे. त्यावरून पायची किंमत येते ३.१४१६. ह्या किमतीलाही तो आसन्न म्हणजे जवळात जवळ किंमत म्हणतो. आधुनिक संगणकाच्या साह्याने पायची अब्जावधी दशांश स्थळापर्यंत किंमत निश्चित करता येते.

आर्यभटीय ग्रंथातील दशगीतिक आणि गणित या दोन विभागात गणिताचे

विश्लेषण आहे. त्यामध्ये संख्याची नावे, वर्ग, घन, वर्गमूळ, घनमूळ, क्षेत्रफळ, घनफळ, अपुर्णांक, त्रैराशिक, कुट्टक आणि भुजज्यांचे साधन अशा अनेक विषयांची चर्चा आहे. सदरहू ग्रंथातील कालक्रिया आणि गोलपाद पूर्णपणे खगोलशास्त्राला वाहिलेले आहेत. पृथ्वी स्थिर नसून स्वतःभोवती फिरते असे मानणारा आर्यभट हा पहिला भारतीय खगोलशास्त्रज्ञ आहे. परंतु पुढील आचार्यांनी आर्यभटाच्या या शास्त्रोक्त मताला पाठिंबा न देता, पृथ्वी स्थिर असून ग्रह व नक्षत्रे तिच्या भोवती भ्रमण करतात असे मानले व आर्यभटाचे मत मागे पडले.

आर्यभटीय हा ग्रंथ खगोलशास्त्राच्या दृष्टिने परिपूर्ण नाही. त्यामध्ये अनेक महत्वाच्या विषयांचा उहापोह केलेला नाही. आर्यभटीय हा ग्रंथ सैद्धांतिक आहे. त्याशिवाय त्याचा आणखी एखादा ग्रंथ असावा. आर्यभटाने ग्रहस्पष्टीकरणाच्या पद्धतीत सुधारणा केली. त्याचप्रमाणे प्राचीन ग्रंथांचा सारासार विचार करून आणि आपली बुद्धि व प्रत्यक्ष वेध यांच्या साह्याने अनेक नवीन गोष्टी शोधून काढल्या. यासंबंधात स्वतः आर्यभट लिहितो की ''पृथ्वी व सूर्य यांच्या योगावरून सूर्याचे, सूर्य आणि चंद्र यांच्या योगवरून चंद्राचे, तसेच चंद्र, तारे व ग्रह यांच्या योगावरून मी सर्व ग्रहांचे साधन केले आहे. शुभाशुभ ज्ञानाच्या समुद्रात बुडालेले सत्यज्ञानरूपी रत्न मी परमेश्वराच्या कृपेने आणि स्वबुद्धीने बाहेर काढले आहे.''

पुढे कित्येक शतके आर्यभटाचा प्रभाव भारतीय ज्योतिषशास्त्रावर होता. आर्यभटावर टीका करणाऱ्या ब्रह्मगुप्तानेही 'मी माझा ग्रंथ आर्यभटीयाच्या योग्यतेचा करीत आहे असे लिहिले आहे. भास्कराचार्य आर्यभटानंतर सुमारे ६०० वर्षांनी होऊन गेले, पण त्यांनीही आर्यभटाची दखल घेतली आहे, यावरून आर्यपटाची योग्यता आपल्या लक्षात येते.

वराह मिहिर

वराहमिहिरच्या जन्माचा नेमका शक आज माहित नाही, पण त्यांचा जन्म शके ४०० च्या आसपास झाला असावा. याचा यर्थ वराहमिहिर आर्यभटाच्या समकालीन आहेत. वराहमिहिर अवंती नगरात म्हणजे आजच्या उजैनमध्ये रहात होते. आदित्यदास या आपल्या पित्याकडून आपल्याला खगोलशस्त्राचे ज्ञान मिळाले असे वराहमिहिरने लिहून ठेवले आहे. आपल्या सर्व ग्रंथांचा प्रारंभ त्याने सूर्यस्तुतीने केला आहे त्यामुळे वराहमिहिर सूर्यभक्त असला पाहिजे. पंच सिध्दांतिका, विवाहपटल,

बृहज्जातक, लघुजातक, यात्रा आणि बृहत्संहिता असे वराहमिहिरचे एकंदर ६ ग्रंथ प्रसिध्द आहेत. त्यातील पंचसिध्दांतिका हा एकच ग्रंथ खगोलशास्त्रावर आहे. बाकीचे ग्रंथ ज्योतिषशास्त्रावर आहेत. आजही अनेक ज्योतिषी बृहज्जातक, लघुजातक आणि बृहत्संहिता या ग्रंथांच्या आधाराने भविष्यकथन करतात.

पंचसिध्दांतिका या ग्रंथात पितामह, वसिष्ठ, रोमक, पुलिश आणि सूर्य या पाच सिध्दांतांचे संकलन केले आहे. प्राचीन गंथकर्त्यांना ज्या गोष्टी माहीत नव्हत्या त्या मी या ग्रंथात सिध्द करून दाखविल्या आहेत, असे त्याने या ग्रंथासंबंधी लिहिले आहे. वर उल्लेख केलेले सर्व सिध्दांत वराहमिहिरच्या काळात उपलब्ध नव्हते, त्यामुळे त्या सर्व सिध्दांतांचा परामर्श एकाच ग्रंथात असल्यामुळे पंचसिध्दांतिकेला अनन्यसाधारण महत्व आहे. वस्तुतः पंचसिध्दांतिका हा एक करण ग्रंथ आहे. करण ग्रंथात खगोलशास्त्रीय गणिताचे केवळ नियम दिलेले असतात, त्यावरून पटापट गणिते करता येतात.

पाच सिध्दांतांमध्ये सूर्य सिध्दांत सर्वश्रेष्ठ आहे असे वराहमिहिर म्हणतो. परंतु आज उपलब्ध असलेला सूर्यसिध्दांत आणि वराहमिहिरच्या काळातील सूर्यसिद्धांत यात पुष्कळ तफावत आहे. वराह मिहिरने त्याच्या काळातील सूर्यसिद्धांताचा सारांश आपल्या ग्रंथात दिला आहे. पंचसिध्दांतिका ग्रंथातील रोमक सिध्दांताचे मूळ ग्रीक देशात असावे, कारण त्यात रोमक देश, यवनपूर, यवनाचर्य असे श्ब्द आले आहेत. आयोनियन देशात म्हणजेच ग्रीसमध्ये रहाणाऱ्या लोकांना आपण यवन या नावाने संबोधित होतो. यवनपूर हे शहर सध्या इजिप्तमध्ये असलेले आलेक्झांड्रिया असावे. असे शहर आलेक्झांडरने स्थापन केले होते. इजिप्तवर कित्येक शतके ग्रीकांची सत्ता होती.

'पंचमहाभूतांनी बनलेला पृथ्वीचा गोल, चुंबकांच्यामध्ये जसे लोखंड असते तसा ताऱ्यांच्या पिंजऱ्यात अधांतरी आहे. ज्याप्रमाणे मनुष्यांच्या देशात म्हणजे भारतात वाऱ्यामुळे अग्निशिखा वर उसळते आणि वर फेकलेली जड वस्तु पृथ्वीवर पडते, त्याच प्रकारे उलट्या दिशेत असूर देशात असेच होते' असे वराहिमिहिर म्हणतो. म्हणजेच त्याला पृथ्वी अधांतरी असल्याचे व आकर्षणाचे नियम सर्वत्र सारखे असल्याचे माहीत होते. पण पृथ्वी स्थिर आहे असे वराहमिहिरचे मत होते. ती जर भ्रमण करीत असती तर पक्षी आपल्या घरट्यांकडे परत कसे आले असते, असा

युक्तिवाद त्याने केला आहे. चंद्रांच्या कलांचे वास्तव कारण काय आहे, हे वराहमिहिरला माहीत होते. चंद्राचे स्थान सूर्यसापेक्ष जस-जसे बदलत जाते तसतसा त्याचा अधिकाधिक भाग प्रकाशमय होतो, असे त्याने लिहिले आहे. वराहमिहिरने काही यंत्राचीही माहिती दिली आहे.

वराहमिहिरला खगोलशास्त्रापेक्षा ज्योतिषशास्त्रात जास्त रूची होती असे दिसते. तसेच विविध प्रकारचे सृष्टीचमत्कार, पदार्थांचे गुणधर्म आणि त्यांचे व्यवहारातील उपयोग या विषयांनीही त्याला आकर्षित केले होते. पदार्थांच्या विविध शाखांचा वराहमिहिरने विचार केला होता. त्या दृष्टीने तो पहिला पदार्थवैज्ञानिक होता. त्याच्या संहिता ग्रंथात या संबंधी विस्तृत चर्चा आहे. त्याने प्रारंभ केलेला सृष्टीचा अभ्यास तसाच पुढे अव्याहत चालू राहिला असता तर आपण कदाचित् त्या विषयात पुष्कळ पुढे गेलो असतो. ब्रह्मगुप्ताने प्राचीन ज्योतिर्विदांचे अनेक दोष दाखविले आहेत पण वराहमिहिरवर मात्र टीका केलेली नाही. भास्कराचार्यांनीही वराहमिहिरची स्तुती केली आहे. इसवी सन ५८७ साली वराहमिहिरच मृत्यु झाला असे मानले जाते.

ब्रह्मगुप्त :

भास्कराचार्यांनी ब्रह्मगुप्ताला गणकचक्रचुडामणि अशी पदवी देऊन गौरविले आहे. आपला सिध्दांतशिरोमणि हा ग्रंथ ब्रह्मगुप्ताच्या सिध्दांतावर आधारित आहे असेही त्यांनी लिहिले आहे. ब्रह्मगुप्ताचा जन्म इसवी सन ६५३ साली झाला व वयाच्या तिसाव्या वर्षी म्हणजे इसवी सन ६८३ साली त्यांनी आपल्या ब्राह्मस्फुट सिध्दांत या सुप्रसिध्द ग्रंथाची रचना केली. अबू पर्वतापासून ४० मैल वायव्येला गुजरात आणि मारवाड यांच्या सहरद्दीवर असलेल्या भिन्नमाल किंवा भिलमाल या गावी ब्रह्मगुप्ताचा जन्म झाला. चापवंशीय व्याघ्रमुख नावाच्या राजाच्या राज्यकाळात आपण वयाच्या तिसाव्या वर्षी ब्राह्मस्फुट हा ग्रंथ आपण लिहीला असे. ब्रह्मगुप्ताने स्वतःच लिहून ठेवले आहे.

वयाच्या ६७ व्या वर्षी ब्रह्मगुप्ताने खंण्डखाद्य या नावाचा आणखी एक ग्रंथ लिहिला. आज ब्रह्मगुप्ताचे केवळ दोनच ग्रंथ उपलब्ध आहेत या शिवाय ध्यानग्रह नावाचा तिसरा ग्रंथ त्याने लिहिला होता. परंतू तो अजून सापडलेला नाही. ब्रह्मगुप्ताच्या दृष्टीने तो अत्यंत महत्वाचा ग्रंथ होता. आपल्या शिष्यांना गुप्तपणे

सांगण्यासाठीच त्याची रचना करण्यात आली होती. त्यामध्ये ७२ आर्या होत्या. कालौघात हा ग्रंथ नष्ट झला असावा.

भारतीय खगोल आणि गणित शास्त्रज्ञांमध्ये ब्रह्मगुप्ताचे स्थान अती उच्च दर्जाचे आहे. ब्रह्मगुप्ताच्याच ग्रंथांची प्रथम अरबी भाषेत भाषांतरे झाली. ब्रह्मगुप्ताच्या ग्रंथांना 'सिन्धि' आणि 'अल् अरकन्द' अशी अरबी नावे देण्यात आली होती. बह्मगुप्ताच्या ग्रंथांवरूनच अरबी लोक भारतीय दशमान पध्दती आणि गणित शिकले,. आणि अरबांनी भारतीय दशमान पध्दती युरोपात नेली. अशाप्रकारे ब्रह्मगुप्ताने आधुनिक गणिताचा पाया घातला असे म्हणायला हरकत नाही. कारण त्याच्या ग्रंथांचा प्रचार भारतापुरताच मर्यादित न रहता तो अरबस्ताना पर्यंत पोहोचला आणि तेथून अप्रत्यक्षरित्या त्याचा युरोपात प्रचार झाला.

ब्राह्मस्फुट सिध्दांतामध्ये २४ अध्याय असून एकंदर १००८ आर्या आहेत. त्यापैकी पहिल्या १० अध्यायांमध्ये खगोलशास्त्राच्या सर्वसिध्दांतांचे विवरण व गणित आहे. अकराव्या अध्यायात ब्रह्मगुप्ताने आर्यभट, श्रीषेण, विष्णुचंद वगैरे पूर्वाचार्यांच्या काही सिध्दांतांचे खंडन केले आहे. बाराव्या अध्यायात अंकगणित, क्षेत्रफळ, सावलीचे गणित इत्यादी विषय आहेत. नंतर पुन्हा १३ ते १७ अध्याय खगोलशास्त्राला वाहिलेले आहेत. त्यानंतरच्या अध्यायात कुट्टक गणित, छाया गणित, यंत्राध्याय, गोलाध्याय वगैरे अध्याय आहेत. ब्रह्मगुप्ताचे खगोलशास्त्र प्रत्यक्ष वेधांवर आधारित आहे. त्यामुळे ब्रह्मगुप्त उत्कृष्ट दर्जाचा आकाश निरीक्षक असावा.

खण्डखाद्यक हा ब्रह्मगुप्ताचा दुसरा ग्रंथ, करण ग्रंथ आहे. ह्या ग्रंथात तिथी, नक्षत्र, ग्रह वगैरे गोष्टींचे गणित सोप्या पध्दतीने करण्याच्या रीती सांगितल्या आहेत. खण्डखाद्यकाचे एकूण दहा अध्याय आहेत. आपला हा ग्रंथ आर्यभटाच्या ग्रंथाशी तुल्यबळ असल्याचे बह्मगुप्ताने लिहिले आहे. यावरून त्याला आर्यभटाच्या महत्वाची जाणीव होती, असे म्हणायला हरकत नाही. खण्डखाद्यकामध्ये ब्रह्मगुप्ताने काही नवीन माहिती व आपले संशोधन ग्रंथीत केले आहे. याशिवाय सूर्यग्रहण, उदयास्त, चंद्रग्रहण, मध्यम व स्पष्ट ग्रह साधन, त्रिप्रश्नाधिकार असे अन्य विषयही ह्या ग्रंथात आले आहेत.

ब्रह्मगुप्त हा एक अत्यंत कल्पक खगोलशास्त्रज्ञ होता यात शंकाच नाही, आपल्या देशात खगोलशास्त्राचे जे स्वरूप आज आपल्याला दिसते त्याचा पाया

ब्रह्मगुप्तानेच घातला. त्यानंतर पुढील सर्व आचार्यांनी त्यात थोडेफार फेरफार केले एवढेच, पण मूल सिध्दांतामध्ये कोणताही बदल करण्यात आला नाही. आर्यभटाच्या ग्रंथात न सांगितलेले अनेक विषय बह्मगुप्ताच्या ब्राह्मस्फुट सिध्दांतामध्ये अतीशय सुव्यवस्थितपणे मांडलेले आहेत. वेध घेण्यासाठी काही यंत्रे ब्रह्मगुप्ताने स्वतः शोधून काढली होती. भारतीय बीजगणिताचा पाया ब्रह्मगुप्तानेच घातला आहे. प्रथम आर्यभटाच्या ग्रंथात बीजगणित नाही. आणि त्यानंतर ब्रह्मगुप्ताच्या काळापर्यंत बीजगणितावरील लिखित ग्रंथ सापडत नाही अर्थात बह्मगुप्त हाच प्रथम भारतीय बीजगणितकार होता.

भास्कराचार्यांचा सिध्दांत शिरोमणी सिध्द होईपर्यंतच्या काळात म्हणजे जवळ-जवळ ५०० वर्षे बाह्मस्फुट सिध्दांत हाच खगोलशास्त्रावरील ब्रह्मगुप्ताचा ग्रंथ सर्वमान्य होता. ज्याचे नाव भारतातच नव्हे तर परदेशातही विशेषतः अरबस्तान व तुर्कस्तान पर्यंत गाजले असा ब्रह्मगुप्त हा पहिलाच भारतीय गणिती होता. किंबहुना ब्रह्मगुप्ताने अप्रत्यक्षरित्या अरबांना गणित शिकविले असे म्हटले तर वावगे होणार नाही ब्रह्मगुप्ताचे मृत्यूवर्ष सापडत नाही, पण तो बऱ्याच वृध्दावस्थेत वारला असावा.

लल्ल

लल्लाच्या काळाबद्दल बरेच मतभेद आहेत. तो बहुधा इसवी सन ६५० च्या आसपास होऊन गेला असावा. लल्लाच्या ग्रंथांचा उत्तर भारतात प्रचार झालेला आढळून येत नाही त्यामुळे लल्लाची कर्मभूमी दक्षिण भारतात कुठेतरी असावी. लल्लाने श्रीवृध्दिदतन्त्र या नावाचा ग्रहगणितावर एक ग्रंथ लिहिला होता. या शिवाय रत्नकोष नावाच एक मुहूर्तग्रंथ व अंकगणित व बीजगणित या विषयांवर त्याने ग्रंथ रचना केली असावी. दुर्दैवाने त्याचे हे ग्रंथ आज सापडत नाहीत पण भास्कराचार्यांनी त्यांचा उल्लेख केलेला आहे.

लल्लाचा श्रीवृध्दिदतंत्र हा ग्रंथ आर्यभटीयाला अनुसरून लिहिलेला आहे. परंतु त्याने गणितात अचुकता आणण्यासाठी अनेक संस्कार दिले आहेत. काही विद्वानांचे असे म्हणणे आहे की लल्ल हा आर्यभटाचा साक्षात् शिष्य होता. परंतू त्याला आधार नाही. कदाचित् लल्ल आणि ब्रह्मगुप्त समकालीन असावेत पण दूर-दूर रहात असल्यामुळे त्यांच परस्परांशी संबंध आला नसावा. भास्कराचार्यांनी लल्लाचे बरेच दोष दाखविले आहेत. लल्लाने प्रत्यक्ष वेध घेऊन ग्रहांची स्थाने निश्चित करण्यासाठी

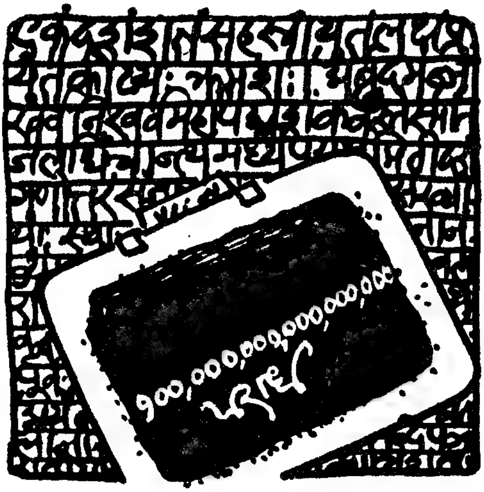
प्रयत्न केला होता हे त्याच्या ग्रंथावरूप स्पष्ट दिसते.

श्रीवृध्दिदतंत्राची श्लोकसंख्या १००० आहे. आर्यभटाचे ग्रंथ विद्यार्थ्यांना नीट समजत नाहीत म्हणून अनेक उदाहरणे देऊन हा ग्रंथ विस्ताराने मी लिहिला आहे, असे लल्लाने स्पष्ट म्हटले आहे. हया ग्रंथात अंकगणित, बीजगणित वगैरे विषयांचा अंतर्भाव नाही केवळ खगोलशास्त्राचेच विवेचन आहे. ब्राह्मस्फुट सिध्दांताची सुधारुन वाढविलेली आवृत्ती, म्हणजे लल्लाचा श्रीवृध्दिदतंत्र हा ग्रंथ असे म्हटले तर वावगे ठरणार नाही. कारण ब्राह्मस्फुट सिध्दांतील सर्व विषय ह्या ग्रंथात परीपूर्ण करण्याचा उपक्रम लल्लाने केला आहे.

भास्कराचार्यांनी सिध्दांतशिरोमणी हा ग्रंथ लिहितांना आधीच्या सर्व आचार्यांचे ग्रंथ आपल्या नजरेखालून घातले असले पाहिजेत यात संशय नाही. आर्यभटापासून पुढील ६०० वर्षाच्या काळात झालेल्या प्रमुख आचार्यांचा उल्लेख त्यांनी आपल्या ग्रंथात केला आहे. त्यापैकी अनेकांची काही विधाने त्यांनी खोडून काढली आहेत. त्यामुळेच सिध्दांतशिरोमणी हा ग्रंथ बऱ्याच प्रमाणात परिपूर्ण झाला आहे. भारतीय खगोलशास्त्राचा तो कळसाध्याय आहे, असे म्हणायला हरकत नाही.

* * *

६



भास्कराचार्यांच्या संख्या संज्ञा

संख्या लिहिण्याची दशमान पध्दत आणि शून्य नावाच्या चिन्हाचा संख्येत अंतर्भाव, हे प्राचीन गणितातील दोन अत्यंत महत्वाचे शोध होते. अशाप्रकारच्या क्रांतीकारक शोधांसाठी आज कदाचित नोबेल परितोषिकही बहाल करण्यात आले असते, इतके या शोधांना महत्व आहे. दुर्दैवाची गोष्ट अशी की ज्या भारतीय गणितज्ञांनी हे शोध लावले त्यांची नांवे इतिहासाला माहीत नाहीत. आपल्या नावाच फारसा गाजावाजा न करता संशोधन करित रहाणे हा जरी प्राचीन काळी सद्गुण होता तरी त्याला आधुनिक काळात दुर्गुणाचा दर्जा प्राप्त झाला आहे. वरील दोन शोध कोणत्या शतकात लागले त्याबद्दलही इतिहास मूक आहे, पण किमान दोन सहस्त्र वर्षांपूर्वीपासून भारतीयांना दशमान पध्दत आणि शून्य ह्या दोन गोष्टी माहीत होत्या या बद्दल संशय नाही. विशेष गोष्ट अशी की त्या काळात आघाडीवर असलेल्या रोमन आणि ग्रीक संस्कृतींच्या पंडितांनाही दशमान पध्दत आणि शून्य यांची कल्पना करता आली नाही.

तेराव्या शतकात फिबोनॅस्सी नावाच्या एका इटालियन गणितज्ञाने भारतीय

दशमान पध्दतीची युरोपला माहिती करून दिली. लहानपणी अल्जेरियात रहात असताना फिबोर्नॅस्सीला गणित शिकविण्यासाठी त्याच्या पित्याने एका अरब शिक्षकाची योजन केली होती. त्यानेच प्रथम फिबोर्नॅस्सीचा भारतीय दशमान पध्दतीशी परिचय करून दिला. पुढ १२०२ साली फिबोर्नॅस्सीने 'लिबेर अबॅसी' नावाचे गणितावरील एक पुस्तक प्रसिध्द केले. ह्या पुस्तकाची पहिली ६ प्रकरणे त्याने हिंदू संख्या पध्दतीची माहिती देण्यासाठी खर्च केली. आणि साऱ्या पुस्तकात हिंदु दशमान पध्दतीचा हिरीरीने पुरस्कार केला. १ ते ९ या हिंदू अंकाचे फिबोर्नॅस्सीने नऊ आकृत्या असे वर्णन केले आहे आणि ते योग्यच आहे. कारण त्या विशिष्ट आकृत्यांच्या किंवा प्रतीकांच्या माध्यमातूनच आपण संख्या लेखन आणि गणिती आकडेमोड करतो.

फिबोर्नॅस्सीच्या लिबेर अबॅसीचे लवकरच युरोपातील सर्व भाषामध्ये भाषांतर झाले, पण युरोपात दशमान पद्धतीचा अंगिकार मात्र करण्यात आला नाही. त्या काळात रोमचे साऱ्या युरोपावर प्रभुत्व होते. त्यामुळे सर्व देशात रोमन अंक पध्दती सर्रास वापरली जाई. रोमन अंक पध्दती म्हणजे वस्तुतः अक्षर लिपी होती जसे ५० साठी L हे इंग्रजी अक्षर किंवा १०० साठी M हे इंग्रजी अक्षर वगैरे अक्षरे उपयोगात आणली जात. अशा प्रकारच्या रोमन किंवा ग्रीक अंक पध्दतीने गणिती क्रिया करणे अवघड जात असे. त्यामुळेच अंकगणित आणि बीजगणित ह्या दोन विषयात युरोपमध्ये फारशी प्रगती होऊ शकली नाही. भारतीयांच्या तुलनेत ग्रीक संस्कृती भूमितीमध्ये आघाडीवर होती.

फिबोर्नॅस्सीने हिंदू दशमान पध्दतीचा पुरस्कार केला तरी पुढे जवळ जवळ तीनशे वर्षे युरोपने दशमान पध्दतीकडे दुर्लक्ष केले. चर्च आणि विद्यापीठे यांनी दशमान पध्दतीवर बंदी घातली. चर्चने बंदी घातली ती धार्मिक कारणासाठी. ख्रिश्चन धर्मातून दशमान पध्दती विकसित झाली नव्हती हे त्याचे प्रमुख कारण. विद्यापीठेही चर्चच्या विरोधात जायला त्या काळात तयार नव्हती. साऱ्या युरोपातच त्याकाळी पोपचा जबरदस्त अधिकार चालत असे. आश्चर्याची गोष्ट अशी की व्यवहारात दशमान पध्दतीचा वापर करता येऊ नये, यासाठी काही देशांनी कायदाही केला. पण कायद्याने सर्व गोष्टींवर निर्बंध घालता येत नाहीत. जी गोष्ट सुकर असेल तीच शेवटी जनता आत्मसात करते आणि कायदे कानू फक्त पुस्तकांच्या पुठ्यात शिल्लक रहातात.

परिस्थिती हळू हळू बदलत होती. भारताशी व्यापार करणाऱ्या अरबांनी हिंदू दशमान पध्दतीचा खुल्या दिलाने स्वीकार केला. आपल्याकडील ज्योतिषशास्त्राच्या ग्रंथांची अरबी भाषेत भाषांतरे करण्यात आली. विशेषतः सातव्या शतकात भारतात होऊन गेलेल्या ब्रह्मगुप्ताच्या ग्रंथांचा अरबस्तानात अभ्यास होऊ लागला. अल् ख्वारिझ्मी नावाच्या अरबी गणितज्ञाने भारतीय दशमान पध्दतीचा अरबस्तानात प्रचार केला. युरोपातील व्यापाऱ्यांचा फार पुरातन काळापासून अरबांच्या माध्यमातूनच भारताशी व्यापार चालत असे. आपल्या ढाक्क्याची मलमल रोममध्ये लोकप्रीय होती ती त्यामुळेच पैशाची आणि मालाची देवघेव करणाऱ्या युरोपियन व्यापाऱ्यांनाच प्रथम दशमान पध्दतीचे महत्व समजले. त्यामुळे होणारी गणिताची सुलभता त्यांच्या लक्षात आली. हिशोब-ठिशोब ठेवण्यासाठी हिंदू दशमान पध्दत सर्वोत्तम आहे असे पाहिल्यावर युरोपीयन व्यापाऱ्यांनी तिचा मुक्तपणे स्वीकार केला. त्यानीच पुढे ती साऱ्या युरोपात व्यवहारात आणली. अरबांच्या माध्यमातून हिंदू दशमान पध्दत युरोपियन लोकांना समजली म्हणून त्यांनी संख्या लिहिण्याच्या या पध्दतीला 'इंडो-अरेबियन न्यूमरल सिस्टिम' असे नाव ठेवले, पण ते चुकीचे आहे, ही गोष्ट आता सर्वमान्य झाली आहे. दशमान पध्दती ही हिंदू संस्कृतीने जगाला दिलेली एक अनमोल देणगी आहे याबद्दल आता संशय राहिलेला नाही. सोळाव्या शतकात साऱ्या युरोपाने दशमान पध्दतीचा अंगिकार केला आणि त्यानंतर मात्र युरोपीयन गणितज्ञांनी गरूडझेप मारली. न्यूटन, लायब्निझ, ऑयलर, पास्कल, डेकार्त, वगैरे एकापेक्षा एक दिग्ग्ज गणिती युरोपात निर्माण झाले आणि अमानुष पारतंत्र्यात जीवन मरणाचा झगडा करावा लागल्यामुळे गणिताच्या स्पर्धेत भारत पिछाडीला फेकला गेला.

फार प्राचीन काळापासून मोठ मोठया संख्याची कल्पना करण्यात आपण भारतीय लोक प्रवीण आहोत. एक महायुग म्हणजे ४,३२०,००० वर्षे किंवा एक कल्प म्हणजे ४,३२०,०००,००० वर्षे, ब्रह्मांडाचा व्याप १८,७१२,०८०, ८६४,०००,००० योजने आहे, अशा प्रचंड संख्या भारतीय गणिती सहज लिहून जातात. अशा महाप्रचंड संख्या जेव्हा युरोपीयन संशोधकांच्या प्रथम नजरेला पडल्या त्यावेळी त्यांनी भारतीय गणितज्ञांच्या 'फॅन्टॅस्टिक इमॅजिनेशनचे' कौतुक केले. पुरातन काळच्या रोमन आणि ग्रीक संस्कृतींची मजल सहस्त्र संख्येच्या पलिकडे

गेलेली नव्हती त्या काळात आम्ही मात्र अब्जांच्या आणि परार्धांच्या गोष्टी बोलत होतो. अगदी ऋग्वेदातही शत, सहस्त्र, पासुन नियुत, अर्बुद आणि परार्ध पर्यंतच्या संख्यांच्या कल्पना आहेत. राजकुमार अवस्थेत असताना भगवान बुध्दांना एका मंत्र्याने प्रश्न केला, 'कुमार तुम्हाला कोटीच्या पलिकडील संख्या कशा मोजतात हे माहीत आहे काय? भगवान बुध्दांनी उत्तर दिले 'हो माहीत आहे' आणि त्यानंतर त्यांनी अयुत म्हणजे १०० कोटीपासून प्रारंभ केला आणि तल्लक्षण म्हणजे $१०^{५३}$ पर्यंतच्या संख्या क्रमाने म्हणून दाखविल्या, असे वर्णन ललित विस्तार नावाच्या एका ग्रंथात आले आहे.

संख्या लिहिण्याच्या हिंदू दशमान पध्दतीचा विशेष असा की, स्थानपरत्वे अंकाची किंमत बदलत जाते. उदाहरणार्थ ५,५०,५००,५००० या संख्यांमध्ये पाच या अंकाची किंमत प्रथम, द्वितीय, तृतीय स्थानाप्रमाणे बदलते. म्हणजेच अंक एका स्थानाने डावीकडे सरकला की त्याची किंमत दहा पटीने वाढते, भारतीय गणितज्ञांची ही अभिनव कल्पना जगातील दुसऱ्या कोणत्याही संस्कृतीच्या लोकांच्या लक्षात आली नव्हती. 'अंकानाम् वामतो गतिः' हे सूत्र आपल्याकडे फार पुरातन काळापासून सुप्रसिध्द आहे. याचा अर्थ असा की अंकाची गती डावीकडे असते, म्हणजेच अंक डावीकडे सरकला की त्याची किंमत बदलते.

शून्य हा भारतीयांचा दुसरा महत्वाचा शोध आहे. अंक नुसता डावीकडे सरकवून त्याची किंमत कशी बदलते हे लक्षात येणार नाही, म्हणून अंक डावीकडे सरकला की जे रिक्त स्थान निर्माण होईल तेथे शून्य लिहायला हवे, ही गोष्ट भारतीय गणितज्ञांच्या लक्षात यायला वेळ लागला नाही. प्रारंभीच्या काळात शून्य याचा अर्थ रिक्त स्थान असाच होता, पुढे त्याला अंकाचे महत्व प्राप्त झाले. समजा आपण ४ ५ २ असे अंक लिहिले व ४ आणि ५ तसेच ५ आणि २ यांच्यामध्ये असलेल्या रिक्त स्थानावर काहीही लिहिले नाही तर आपल्याला दिलेली संख्या नेमकी काय आहे, हे समजणार नाही, पण तीच संख्या आपण ४०५०२ अशी लिहिली की तिची किंमत चाळीस हजार पाचशे दोन आहे हे चटकन् लक्षात येईल. भारतीय दशमान पध्दती आणि शून्य यांनी गणिती क्रिया किती सुलभ केल्या याचा आपल्याला आज अंदाज येणार नाही पण पुरातन काळी गणनासाठी कोणतीही साधने उपलब्ध नसताना दशमान पध्दतीमुळे गणिती क्रिया किती सोप्या झाल्या

असतील याची कल्पना केलेली बरी.

दशमान पध्दतीत दहा ही संख्या; गणनाचा पाया असते. त्या-त्या स्थानावरील अंकांना दहाच्या विशिष्ट घातांनी गुणावे लागते, मगच आपल्याला पूर्ण संख्या मिळते. उदाहरणार्थ ७८५३ ही संख्या वस्तुतः $७ \times १०^{३} + ८ \times १०^{२} + ५ \times १०^{१} + ३ \times १०^{०}$ अशी आहे, पण व्यवहारात आपण दहाचे घात गाळून दिलेली संख्या सात हजार आठशे त्रेपन्न आहे असे म्हणतो. बरं दहाचा कोणताही घात आपण चटकन् करू शकतो. गणनाचा पाया दहापेक्षा निराळा म्हणजे ७ किंवा १२ असता तर त्यांच्या निरनिराळ्या घातांची किंमत लक्षात ठेवणे अत्यंत अवघड गेले असते. सुकरता, सुलभता, अचुकता आणि प्रचंड संख्या लिहीण्याची क्षमता, ही आहे दशमान पद्धतीची विशेषता.

भास्कराचार्यांनी आपल्या लीलावती या ग्रंथात प्रारंभीच संख्यांच्या गणनासाठी एक सुंदर सुभाषित दिले आहे. ते असे,

एकदशशत सहस्त्रः अयुतलक्ष प्रयुत कोट्यः क्रमशः
अर्बुदम अब्जम् खर्व निखर्व महापद्म शंकवः तस्मात्
जलधिश्च अन्त्यं मध्यं परार्धम् इति दशगुणोत्तर संज्ञाः
संख्यायाः स्थानानां व्यवहारार्थ कृताः पूर्वैः

उजवीकडून डावीकडे अनुक्रमाने एकम्, दशम्, शतम्, सहस्त्र, अयुत (दश सहस्त्र), लक्ष, प्रयुत (दशलक्ष), कोटी, अर्बुद (दशकोटी), अब्ज, खर्व, निखर्व, महापद्म, शंकू, जलधी, अंत्य, मध्य, परार्ध ही संख्या स्थाने आहेत. ह्या प्रत्येक स्थानाची किंमत उजवीकडील स्थानाच्या दसपट आहे. ही संख्यांच्या मूल्यांची दशमान पध्दत गणिताच्या सुलभ व्यवहारासाठी पूर्वीच्या आचार्यांनी प्रचलीत केली आहे.

भास्कराचार्यांच्या या संख्या संज्ञा दहाच्या घातांकांच्या स्वरूपात आपल्याला पुढीलप्रमाणे लिहिता येतील.

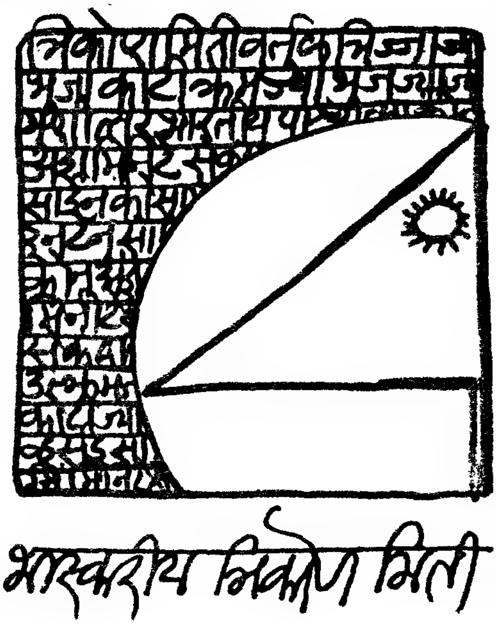
एकम्	= १	$= १०^{०}$
दशम्	= १०	$= १०^{१}$
शतम्	= १००	$= १०^{२}$
सहस्त्र	= १०००	$= १०^{३}$

अयुत	= १०,०००	= $१०^{४}$
लक्ष	= १००,०००	= $१०^{५}$
प्रयुत	= १०००,०००	= $१०^{६}$
कोटी	= १०,०००,०००	= $१०^{७}$
अर्बुद	= १००,०००,०००	= $१०^{८}$
अब्ज	= १०००,०००,०००	= $१०^{९}$
खर्व	= १०,०००,०००,०००	= $१०^{१०}$
निखर्व	= १००,०००,०००,०००	= $१०^{११}$
महापद्म	= १०००,०००,०००,०००	= $१०^{१२}$
शंकू	= १०,०००,०००,०००,०००	= $१०^{१३}$
जलधी	= १००,०००,०००,०००,०००	= $१०^{१४}$
अन्त्य	= १०००,०००,०००,०००,०००	= $१०^{१५}$
मध्य	= १०,०००,०००,०००,०००,०००	= $१०^{१६}$
परार्ध	= १००,०००,०००,०००,०००,०००	= $१०^{१७}$

अशा प्रकारे संख्यांच्या किंमती अनंतापर्यंत वाढविता येतील. वरील सुभाषितात संख्या लिहिण्याची ही पध्दत पूर्वाचार्यांनी प्रचलित केल्याचे भास्कराचार्यांनी स्पष्टपणे नमूद केले आहे. पुरातन भारतीय वाड्.मयात त्याचे आपल्याला तात्काळ प्रत्यंतर येते. पाश्चात्य देशत अगदी अलिकडे संख्यांची मर्यादा अब्ज म्हणजे बिलीयन पर्यंतच होती. आता ट्रिलीयन ($१०^{१२}$) वगैरे शब्द प्रचारात येत आहेत. आपल्याकडे $१०^{१७}$ पर्यंतच्या संख्याना प्रत्यक्ष नावे देण्यात आली आहेत हे विशेष. गणिती बुध्दीची झेप त्यामधून लक्षात येते.

***

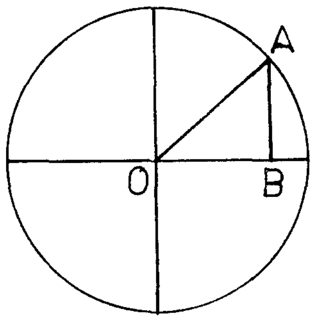
७



त्रिकोणमिती हा विषय खगोलशास्त्राच्या दृष्टीने अत्यंत महत्वाचा आहे. त्रिकोणमितीमधील भारतीय संकल्पना आणि पाश्चात्य संकल्पना यांचेमध्ये थोडासा मूलभूत फरक आहे. गणिताशी थोडासा संपर्क आलेल्या व्यक्तींनाही साइन, कोसाइन आणि टॅन ही त्रिकोणमितीमधील तीन, गुणोत्तरे माहित असतात. भारतीय त्रिकोणमितीत कोसाइन आणि टॅन ही दोन गुणोत्तरे अस्तित्वातच नाहीत. साइन या एकाच गुणोत्तराच्या आधारवर सारी भारतीय त्रिकोणमिती उभी आहे. तरिही त्रिकोणमितीतील सर्व आधुनिक सूत्रे भारतीय त्रिकोणमितीमधून मिळू शकतात. प्रत्यक्षात भारतीय साइन आणि पाश्चात्य साइन पूर्णतः निराळ्या आहेत. पाश्चात्य साइन हे गुणोत्तर आहे तर भारतीय साइन ही रेषेची लांबी आहे. भारतीय त्रिकोणमिती पाश्चात्य त्रिकोणमितीच्या तुलनेत अतीशय सोपी आहे. भारतीय त्रिकोणमितीच्या मांडणीवर पाश्चात्य विज्ञानांनीही आश्चर्य व्यक्त केले आहे.

भारतीय व पाश्चात्य त्रिकोणमिती यामधील फरक समजण्यासाठी साइन, को साइन आणि टॅन यांचे पाश्चात्य अर्थ काय आहेत हे प्रथम पाहूया. सोबतच्या आकृतीत एक एकक त्रिज्जेच्या वर्तुळात OAB हा काटकोन त्रिकोण रेखाटला आहे. त्यातील AOB ह्या कोनासाठी आपल्याला हवी असणारी गुणोत्तरे पुढीलप्रमाणे

लिहिली जातात. सोईसाठी AOB ह्या कोनाला आपण X हे नाव देऊ.



$$\text{SIN } X = \frac{AB}{OA}$$

$$\text{COS } X = \frac{OB}{OA}$$

$$\text{TAN } X = \frac{AB}{OB}$$

वर्तुळाची OA ही त्रिज्जा एक एकक आहे असे मानले तर SIN X = AB आणि Cos X = OB अशा किमती आपल्याला मिळतील.

भारतीय गणितज्ञांनी वर्तुळाची त्रिज्जा एक एकक न घेता ३४३८ त्रिज्जेचे वर्तुळ निवडले. ही विशिष्ट त्रिज्जा दोन प्रकारांनी मिळविता येते. भारतीयांना असे आढळले की वर्तुळाच्या परिघावर त्रिज्जेएवढेच अंतर मोजून घेतले तर जो चाप तयार होता तो वर्तुळाच्या केंद्रापाशी ५७ अंश १७ मिनिटे ४४ सेंकद एवढा कोन करतो. ह्या विशिष्ट कोनाचे रुपांतर मिनिटांमध्ये केले की दशांश अपूर्णांकाच्या परिभाषेत ३४३७.७४६ मिनिटे मिळतात त्याचा जवळचा पूर्णांक ३४३८ मिनिटे आहे.

दुसऱ्या पध्दतीमध्ये वर्तुळाच्या ३६० अंशाचे मिनिटात रूपांतर करून त्याला पायच्या दुपटीने भागण्यात येते. ३६० अंशाची मिनिटे होतात, ३६० x ६० = २१६०० आणि भारतीयांनी पायची किंमत घेतली होती ३.१४१६ त्यामुळे वरील गुणोत्तराची किंमत होते.

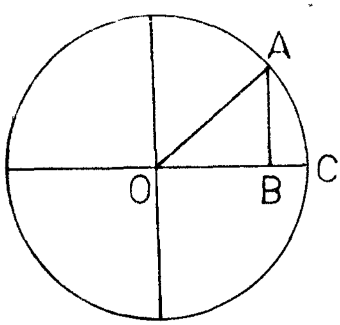
$$\frac{२१६००}{२ \times ३.१४११६} = ३४३७.७३८७$$

अर्थातच या उत्तराच्या जवळचा पूर्णाक येतो ३४३८

भारतीयांनी वर्तुळाच्या त्रिज्जेची केलेली ही निवड शास्त्रशुध्द आहे यात शंकाच नाही. आधुनिक रेडियन एकक यातील पहिल्या पध्दतीवर आधारित आहे.

भास्कराचार्यांनीही पूर्वाचार्यांना अनुसरून ३४३८ हीच त्रिकोणमितीसाठी वर्तुळाची त्रिज्जा निवडली होती.

भारतीय साइन, कोसाइन यांचे नेमक अर्थ समजून घेण्यासाठी ३४३८ त्रिज्जेच्या वर्तुळात OBA हा काटकोन त्रिकोण काढला आहे. त्यामधील AOB कोनासमोरील AB ह्या बाजूला भुजा, आणि कोनालगत असलेल्या OB ह्या बाजूला कोटी अशी भारतीय नावे आहेत. त्यातील AB म्हणजेच क्रमज्या, भुजज्या किंवा फक्त ज्या. हीच भारतीयांची साइन आहे. OB ला कोटीज्या व BC ह्या रेषा खंडाला उत्क्रमज्या अशी भारतीय नावे आहेत. उत्क्रमज्याला 'व्हर्सड् साइन' असे इंग्रजी नाव देण्यात आले आहे आहे. AOB ह्या कोनाची भुजज्या AB असेल तर BAO ह्या कोनाची भुजज्या OB असणार हे उघड आहे. तसेच ९० अंशातून AOB हा कोन वजा केला की BAO हा कोन मिळातो. त्यामुळेच भारतीय त्रिकोणमितीत त्यांनी केवळ साइन किंवा भुजज्याच्याच विचार केला. भारतीय त्रिकोणमितीत टॅन नाही कारण तीही किंमत भुजज्येवरून काढता येते. यावरून आपल्याला पाश्चात्य व भारतीय साइन यामध्यील संबंध निश्चित करता येईल.



पाश्चात्य साइन $= \frac{AB}{OA}$

पाश्चात्य साइन = भुजज्या = AB

आणि, वर्तुळाची त्रिज्जा = OA = ३४३८

म्हणून, पाश्चात्य साइन

$= \frac{\text{भारतीय साइन}}{३४३८} = \frac{\text{भुजज्या}}{३४३८}$

किंवा, पाश्चात्य साइन $= \frac{\text{ज्या}}{३४३८}$

भास्कराचार्यांनी ९० अंशाचे २४ समान भाग केले. अर्थात प्रत्येक भागाची किंमत ३ अंश ४५ मिनिटे येते. मिनिटांमध्ये हीच किंमत २२५ मिनिटे आहे. कोन लहान असेल तर कोन आणि त्याची साइन ह्यांची किंमत जवळ जवळ सारखीच असते, ही गोष्ट भास्कराचार्यांना ठाऊक होती त्यामुळे ३ अंश ४५ मिनिटांची भारतीय साइन त्यांनी २२५ मिनिटे आहे असे मानले व नंतर ह्या

कोनाच्या २४ पर्यंतच्या पटीमधील भारतीय साइन निश्चित केल्या, तसेच उत्क्रमज्या किंवा व्हर्सड् साइन काढण्यासाठी पुढील सूत्र वापरले.

उत्क्रमज्या = BC = OC - OB = OC - OAB ह्या कोनाची भुजज्या.

परंतू कोन OAB = ९० - कोन AOB म्हणून

उत्क्रमज्या = ३४३८ - (९० - कोन AOB) ची भुजज्या उदाहरणार्थ ३ अंश ४५ मिनिटे या कोनाची उत्क्रमज्या पुढील प्रमाणे मिळेल.

३ अंश ४५ मिनिटची उत्क्रमज्या = ३४३८-(९०-३अंश ४५ मिनिट) ची भुजज्या

= ३४३८-८६ अंश १५ मिनिटची भुजज्या.

= ३४३८ - ३४३१ = ७

भास्कराचार्यांनी तयार केलेले कोष्टक असे आहे.

कोन	भारतीय साइन = भुजज्या	पाश्चात्य साइन वरून किंमत	व्हर्सड् साइन = उत्क्रमज्या
३° ४५	२२५	२२४.८५	७
७° ३०	४४९	४४८.९५	२९
११ १५	६७१	६७०.७२	६६
१५ ०	८९०	८८९.८२	११७
१८ ४५	११०५	११०५.०१	१८२
२२ ३०	१३१५	१३१५.०५	२६१
२६ १५	१५२०	१५२०.५८	२५४
३० ०	१७१९	१७१९.००	४६०
३३ ४५	१९१०	१९१०.०५	५७९
३७ ३०	२०९३	२०९२.०९	७१०
४१ १५	२२६७	२२६६.०८	८५३
४५ ०	२४३१	२४३१.०१	१००७
४८ ४५	२५८५	२५८४.०८	११७१
५२ ३०	२७२८	२७२७.५५	१३४५
५६ १५	२८५९	२८५८.५५	१५२८
६० ०	२९ ७८	२९७७.०४	१७१९
६३ ४५	३०८४	३०८३.४५	१९१८

६७ ३०	३१७७	३१७६.०६	२१२३
७१ १५	३२५६	३२५५.७५	२३३३
७५ ०	३३२१	३३२०.८५	२५४८
७८ ४५	३३७२	३३७१.९५	२७६७
८२ ३०	३४०९	३४०८.७५	२९८९
८६ १५	३४ ३१	३४३०.८५	३२१३
९० ०	३४३८	३४३८.००	३४३८

आता प्रश्न असा निर्माण होतो की ह्या कोष्टकात नसलेल्या कोनांच्या भारतीय साइन किंवा भुजज्या कशा ठरवायच्या? भास्कराचार्यांनी त्यासाठी एक सोपी पध्दती दिली आहे. समजा आपल्याला ७६ अंशाची भुजज्या निश्चित करायची आहे. आपले गणित पुढिलप्रमाणे राहील.

- ७६ अंशाची मिनिटे करा व आलेल्या मिनिटांना २२५ ने भागा. ७६ x ६०/२२५ = भागाकार २०, बाकी ६०
- कोष्टकातील २० क्रमांकावर असणारी ज्याची किंमत ३३२१ आहे तिला गतज्या म्हणा आणि २० व २१ क्रमांकांच्या ज्यांमधील फरक काढा तो ५१ आहे.
- २२५ मिनिटांसाठी ५१ फरक असेल ६० बाकीसाठी किती फरक येईल ह्या त्रैराशिका प्रमाणे
  फरक = ६० x ५१/२२५ = भागाकर १३ बाकी सोडून द्या हा फरक गतज्यामध्ये मिळवा म्हणज्जे ७६ अंशाची ज्या मिळेल.
- ७६ अंशाची ज्या = ३३२१ + १३ = ३३३४ पाश्चात्य साइन वापरून काढलेली किंमत ३३३५.८७ येते. बाकी सोडून दिल्यामुळे उत्तरात थोडी चूक आली आहे.
- वरील पध्दत वापरून कोणत्याही कोनाची उत्क्रमज्या काढता येईल.

***

८

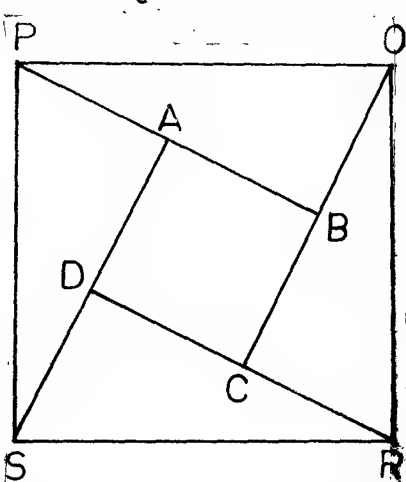


पायथागोरसचा सिध्दांत आणि भास्कराचार्यांची सिध्दता

थोडेफार शिक्षण घेतलेल्या प्रत्येक व्यक्तीला पायथॅगोरसचे नाव हमखास माहीत असते. शाळेमध्ये भूमिती शिकत असताना प्रत्येकाचा पायथॅगोरसच्या सिध्दांताशी संबंध येतो. नंतर साऱ्या आयुष्यात आपण पायथॅगोरसला विसरत नाही. एखादा

काटकोन त्रिकोण पाहिला की आपल्याला पायथॅगोरसची आठवण झाल्याशिवाय रहात नाही. परंतू पायथॅगोरसच्या नावाने प्रसिध्द असलेला सिध्दांत भारतीयांना मात्र फार प्राचीन काळापासून माहीत होता. इसवी सन पूर्व ५६० साली तो सिध्दांत पायथॅगोरसने शोधून काढला असे म्हटले जाते. पण इसवी सन पूर्व १५०० च्या आसपास लिहिण्यात आलेल्या शुल्वसूत्र या भारतीय ग्रंथात या सिध्दांताचे स्पष्ट विवरण आहे. यज्ञाच्या वेदी कशा बांधाव्यात यासाठी शुल्वसूत्र या ग्रंथाची रचना करण्यात आली होती. शुल्व म्हणजे रज्जू. त्या काळात रज्जूच्या साह्याने मोजमापे घेतली जात असत त्यामुळेच त्या ग्रंथाला शुल्वसूत्र असे नाव देण्यात आले.

काटाकोन त्रिकोणाच्या काटकोनालगत असलेल्या दोन बाजूंच्या वर्गांची बेरीज कर्णाच्या वर्गाबरोबर असते, असे पायथॅगोरसचा सिध्दांत सांगतो. या एकाच सिध्दांतासाठी आजपर्यंत शेकडो सिध्दता देण्यात आल्या आहेत. त्यातील कित्येक किचकट आणि क्लिष्ट आहेत. कोणतीही गोष्ट सोपी आणि सुलभ करून सांगण्यात एकंदरच भारतीय गणितज्ञांचा हातखंडा आहे. भास्कराचार्यांनी पायथॅगोरसच्या सिध्दांतासाठी एक अगदी सोपी सिध्दता आपल्या लीलावती या ग्रंथात दिली आहे. सोबतच्या आकृतीवरून ती आपल्याला चटकन् समजू शकेल.



PQRS ह्या चौरसाची प्रत्येक बाजू Z आहे. P, Q, R आणि S ह्या बिंदूंमधून PB, QC, RD आणि SA ह्या रेषा अशा काढल्या की PQRS ह्या चौरसात PBQ, QCR, RDS आणि SAP हे चार काटकोन त्रिकोण व ABCD हा चौरस तयार होईल. हे सर्व काटकोन त्रिकोण एकरूप आहेत हे सिध्द करणे फारसे अवघड नाही. तसेच चौरसाची Z ही बाजू हाच सर्व काटकोन त्रिकोणांचा कर्ण आहे. प्रत्येक काटकोन त्रिकोणाची काटकोनाशेजारी असणारी मोठी बाजू X व लहान बाजू Y आहे, असे मानले तर ABCD ह्या चौरसाची प्रत्येक बाजू (X - Y) होईल. PQRS ह्या

चौरसाचे क्षेत्रफळ, त्यामधील चार काटकोन त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ आणि मध्यभागी तयार झालेल्या ABCD ह्या चौरसाचे क्षेत्रफळ यांच्या बेरजेएवढे असणार हे उघड आहे.

PQRS चौरसाचे क्षेत्रफळ $= Z \times Z = Z^2$

चार काटकोन त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ $= 4 \times \frac{1}{2} X \times Y = 2XY$

ABCD चौरसाचे क्षेत्रफळ $= (X - Y) \times (X - Y) = X^2 - 2XY + Y^2$

ह्यावरून आपल्याला पुढील समीकरण लिहिता येईल.

$Z^2 = 2XY + X^2 - 2XY + Y^2$

$Z^2 = X^2 + Y^2$

पण X आणि Y ह्या काटकोन त्रिकोणांच्या बाजू आहेत आणि Z हा त्यांचा कर्ण आहे. त्यामुळे काटकोन त्रिकोणाच्या दोन बाजूंच्या वर्गांची बेरीज, कर्णाच्या वर्गाबरोबर असते हा पायथॅगोरसचा सिध्दांत सिध्द झाला.

पायथॅगोरसच्या सिध्दांतावर आधारित असलेली काही मजेशीर गणिते भास्कराचार्यांनी आपल्या लीलावती या ग्रंथात दिली आहेत. त्यापैकी काही नमुने पहा!

एका स्तंभाच्या तळाशी सर्पाचे बीळ होते. त्या स्तंभावर एक पाळीव मोर बसला होता. स्तंभाची उंची ९ हात होती व त्याच्या तिप्पट अंतरावरून एक सर्प बिळाच्या दिशेने येत असलेला मोराने पाहिला. ताबडतोब त्या मोराने सर्पाच्याच गतीने झेप घालून बिळापासून काही अंतरावर सर्पाला पकडले. तर ते अंतर किती होते ते चटकन् सांग पाहू.

एका सरोवरात चक्रवाक् व क्रौंच पक्षी क्रीडा करीत होते. त्यात पाण्याच्या वर एक द्वितीयांश हात उंच असलेले कमळ मंद-मंद वाऱ्याच्या झुळकेने सरकून दोन हात अंतरावर जाऊन पाण्यात बुडाले तर, हे गणका सरोवराच्या पाण्याची खोली किती होती ते चटकन् सांग बरं.

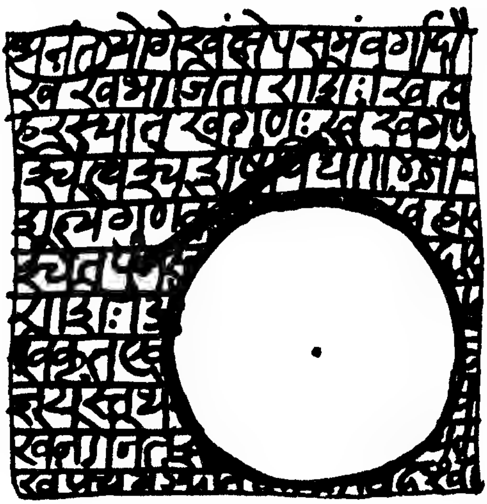
१०० हात उंचीचे एक ताडाचे झाड होते. व त्याच्या बुंध्यापासून २०० हात अंतरावर एक विहीर होती. ताडाच्या शेंड्यावर दोन वानर बसले होते. त्यातील एक सरळ झाडावरून उतरून विहीरीपर्यंत चालत गेला. दुसऱ्याने प्रथम एक उंच उडी मारली व नंतर तो सरळ कर्ण दिशेत विहीरीवर झेपावला. त्या दोघांनी सारखेच अंतर कापले असल्यास दुसऱ्या वानराने किती उंच उडी मारली? पायथॅगोरसचा

सिध्दांत व थोडी आकडेमोड यांच्या साह्याने तुम्हालाही ही गणिते सोडविता येतील. पहा तुम्हाला पुढील उत्तरे मिळतात का!

मोराने सर्पाला बिळापासून १२ हातांवर पकडले. सरोवराच्या पाण्याची खोली १५/४ हात असली पाहिजे. दुसऱ्या वानराने प्रथम ५० हात उंच उडी मारली.

***

१



भास्कराचार्यांना 'अनंत' ही संकल्पना माहित होती काय ?

गणितामधील अनंत ही संकल्पना तशी आधुनिक आहे. ऑयलर, गॉस् वगैरे आधुनिक दिग्गज गणितज्ञांना गणितामध्ये अनंत नावाची संख्या गृहीत धरणे योग्य वाटत नव्हते. परंतु सरतेशेवटी अनंताची संकल्पना प्रस्थापित झाली. 'जी संख्या कोणत्याही प्रचंड मोठ्या संख्येपेक्षा मोठी असते तिला अनंत असे म्हणतात.' अनंताची ही एक मजेदार व्याख्या आहे. खरं म्हणजे अनंत ह्या संख्येचा कोणताही अंदाज करता येत नाही. कारण कितीही मोठी संख्या मांडली की आणखी आकडे किंवा शून्य या संख्येच्या पुढे लिहून त्याच्यापेक्षा मोठी संख्या मांडता येते. कोणत्याही संख्येला शून्याने भागले की मिळणारे उत्तर अनंत असते, अशी आधुनिक

गणितातील एक महत्वाची संकल्पना आहे. या संबंधात भास्कराचार्यांचे काय मत आहे, ते तपासून पहाणे मार्गदर्शक ठरेल.

भास्कराचार्यांनी आपल्या बीजगणितात पुढील उदाहरण दिले आहे. 'शून्याला ३ ह्या संख्येने गुणिले, शून्याला ३ ह्या संख्येने भागले, ३ ह्या संख्येला शून्याने भागले, शून्याचा वर्ग केला व शून्याचे वर्गमूळ काढले तर काय उत्तर मिळतील?

भास्कराचार्यांनी दिलेली उत्तरे अशी आहेत.

$$३ \times ० = ०$$

$$० / ३ = ०$$

$$३ / ० = ३/०$$

$$०^{२} = ०$$

$$\sqrt{०} = ०$$

ह्या सर्व उत्तरात ३/० हे उत्तर महत्वाचे आहे. आधुनिक परिभाषेप्रमाणे ह्या भागकाराचे उत्तर अनंत आहे. पण भास्कराचार्य मात्र हा भागाकार तसाच ठेवतात. ह्या गणिताच्या आधी ते लिहितात, कोणत्याही संख्येला शून्याने भागले तर भागाकार शून्य येतो असे नाही. अशा भागाकाराला खहरराशी असे समजावे. पुढे खहर राशी संबंधी त्यांनी पुढीलप्रमाणे विवेचन केले आहे.

'प्रलयकाली संपूर्ण भूतगण अनंत परमेश्वराचे ठायी प्रवेश करतात व सृष्टी उत्पन्न होण्याच्या वेळी सर्व भूतगण अनंत परेमश्वरापासून उत्पन्न होतात. त्यामुळे अंनताला विकार होत नाही. म्हणजेच अनंताला स्थूलत्व किंवा लघुत्व येत नाही. त्याचप्रमाणे खहर राशीमध्ये कितीही संख्या मिळविल्या किंवा वजा केल्या तरी खहर राशीला विकार होत नाही, म्हणजे खहर राशी न्यूनाधिक होत नाही.

ह्या विवेचनाचा स्पष्ट अर्थ असा आहे की भास्कराचार्यांची खहर राशी म्हणजेच आधुनिक अनंत ही संकल्पना आहे. केवळ नावात फरक दिसतो अन्यथा खहर राशीचे व अनंताचे गूण सारखेच आहेत. इतके असूनही त्यांना अनंताची कितपत सम्यक कल्पना आली होती त्याचा अंदाज करता येत नाही, कारण पुढे बीजगणितातच त्यांनी आणखी एक उदाहरण दिले आहे, ते असे.

'ज्या संख्येला शून्याने भागले व त्यात एक कोटी मिळविले किंवा वजा केले,

नंतर त्याचा वर्ग केला आणि त्यात त्याचे वर्गमूळ मिळविले व सरते शेवटी शून्याने गुणले तर ९० ही संख्या मिळते तर निवडलेली संख्या कोणती होती?'

ह्या गणिताचा भास्कराचार्य पुढील खुलासा देतात. निवडलेली संख्या = X

$$\therefore \quad \left(\frac{X}{0} \pm 10000000\right)^2 = \frac{X^2}{0}$$

वरील उत्तराचे कारण असे की X/0 ही सदर राशी आहे त्यामध्ये कितीही मोठी संख्या मिळविली किंवा वजा केली तरी तिच्यात फरक पडत नाही म्हणून

$$\frac{X}{0} \pm 10000000 = \frac{X}{0}$$

$\frac{X^2}{0}$ ह्याचे वर्गमूळ $\frac{X}{0}$ आहे असे भास्कराचार्य म्हणतात. त्यामुळे वरील उदाहरणाप्रमाणे

$$\left(\frac{X^2}{0} + \frac{X}{0}\right) \times 0 = 90$$

आधुनिक संकल्पनेप्रमाणे ह्या पदापासून भास्कराचार्यांचे गणित चुकत गेले आहे. कारण त्यांनी शून्याचा छेद देऊन,

$$\frac{X^2}{0} \times 0 = X^2$$

आणि

$$\frac{X}{0} \times 0 = X$$

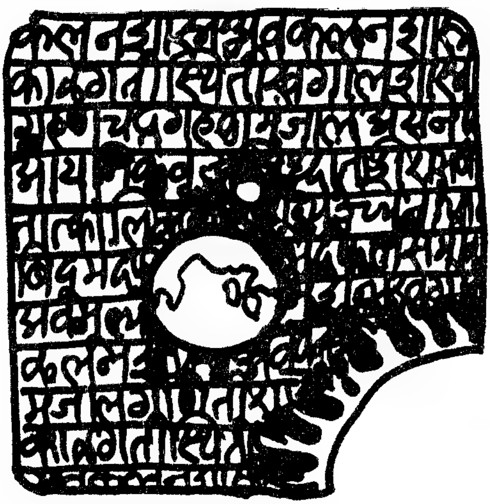
अशा किंमती घेतल्या आहेत व वरील समीकरण

$$X^2 + X = 90$$

असे मांडले आहे व X ची किंमत 9 काढली आहे. ह्या गणितावरून असे वाटते की अनंताच्या म्हणजेच खहराच्या गणिती क्रियांची भास्कराचार्यांना नीटशी कल्पना झाली नव्हती, पण आधुनिक गणितातील अनंत म्हणजेच भास्कराचार्यांचे खहर ह्यात शंका नाही.

***

१०



भास्कराचार्य आणि कॅलक्यूलस

कॅलक्युलसचा शोध हा मानवाच्या गणिती बुद्धिमत्तेची एक उत्तुंग विजयपताका आहे. गणिताने गरूडभरारी मारली ती कॅलक्युलसचा शोध लागल्यानंतर. आता पदार्थविज्ञान आणि तंत्रज्ञान या विषयांचे कॅलक्युलसशिवाय पानसुद्धा हलत नाही. खगोलशास्त्रातील अनेक जटील प्रश्न कॅलक्युलसमुळे चुटकीसरशी सोडविता आले. कॅलक्युसचा शोध ब्रिटनच्या न्यूटनने लावला की जर्मनीच्या लायब्निझने, ह्या प्रश्नावर अजूनही वादंग चालू आहे. ब्रिटिशांचं म्हणणं असं की लायब्निझने न्यूटनचा शोध चोरला. बहुधा दोघानांही एकाच काळात कॅलक्युलसची संकल्पना सुचली असावी. सत्य काहीही असो. कॅलक्युलसने एकंदर विज्ञान क्षेत्रातच क्रांती घडवली हे निश्चित. भास्कराचार्यांना कॅलक्युलसची संकल्पना स्फुरली नाही, पण ते या विषयाच्या जवळपास येऊन पोहोचले होते, ह्याला भरपूर आधार आहे.

ज्यावेळी एखाद्या वस्तूची गती क्षणक्षणाला बदलत असते अशावेळी एका विशिष्ट क्षणाला त्या वस्तूची स्थिती ठरविण्यासाठी कॅलक्युलसचा उपयोग होतो. कॅलक्युलससाठी आपल्या मराठीत कलनशास्त्र असा शब्द वापरला जातो. कॅलक्युलसचे दोन प्रकार आहेत एक इंटिग्रल आणि दुसरा डिफरंशिअल. अनेक

अत्यंत लहान लहान विभागांची बेरीज म्हणजे इंटिग्रल कॅलक्यूलस आणि एखाद्या गोष्टीचे अत्यंत लहान लहान विभागात रुपांतर म्हणजे डिफरंशिअल कॅलक्युलस. अर्थात ह्या व्याख्या बऱ्याच ठोबळ आहेत. बदलल्या गतीने अंतर आक्रमण करणाऱ्या वस्तूची एका विशिष्ट क्षणाला गती निश्चित करण्यासाठी डिफरंशियल कॅलक्युलसचा उपयोग करतात.

सूर्य, चंद्र आणि ग्रह यांच्या स्थिती क्षणाक्षणाला बदलत असल्यामुळे एका विशिष्ट क्षणी त्यांची स्थिति निश्चित करण्यासाठी अवकलन शास्त्रासारखे म्हणजेच डिफरंशियल कॅलक्युलससारखे हत्यार नाही. कॅलक्युरसमध्ये कोणत्याही गोष्टीतील बदल दर्शविण्यासाठी d हे इंग्रजी अक्षर मागे जोडतात जसे dt म्हणजे काळातील बदल. dv गतीतील बदल, ds म्हणजे स्थितीतील बदल वगैरे. ह्यामध्ये t,v, s वगैरे अक्षरे काळ, गती, स्थिती यांच्यासाठी वापरली आहेत. अत्यंत अल्पकाळातील स्थितीमधील बदल दर्शविण्यासाठी आपल्याला ds/dt असे गुणोत्तर लिहिता येते.

ग्रहणांचे अत्यंत अचुक भविष्य वर्तविणे हा प्राचीन खगोलशास्त्रातील एक अत्यंत महत्वाचा प्रश्न होता. अनेक वेळा हे ग्रहणाचे गणित काही तासांनीही चुकत असे. चंद्रग्रहणाची सुरूवात नेमकी केव्हा होईल, हे सांगण्यासाठी चंद्राची एका विशिष्ट क्षणी तात्कालिक गती निश्चित करणे आवश्यक असते. तात्कालिक गतीलाच इंग्रजीत 'इंन्स्टंटेनिअस मोशन' असे नाव आहे. पहिल्या आर्यभटाने व ब्रह्मगुप्ताने या तात्कालिक गतीचा विचार केला होता. आधुनिक परिभाषेत त्यांनी तात्कालिक गतीसाठी पुढील सूत्र वापरले होते.

$$U1 - U = V1 - V \pm e (\sin W1 - \sin W)$$

या सूत्रात एका विशिष्ट क्षणी

U = चंद्राचा वास्तव भोग

V = चंद्राचा मध्यम भोग

W = ज (मनी ॲनॉमली)

त्याचप्रमाणे U1, V1, W1 ह्या किमती अनुक्रमाने त्यानंतरच्या एका क्षणाच्या वेळच्या आहेत. तसेच सूत्रातील ९ म्हणजे केंद्रच्युती किंवा एक्सेंट्रिसिटी.

इ. स. ९३० च्या आसपास होऊन गेलेला मुंजाल हा पहिला भारतीय खगोलशास्त्र होता की ज्याच्या असं लक्षात आलं वरील सूत्र पुढीलप्रमाणे लिहिता येईल

U1-U = V1 - V $\pm$ e (W1-W) Cos W

कारण (Sin W1-Sin W) = (W1-W) Cos W

आधुनिक परिभाषेत हेच असेही लिहिता येईल.

du = dv $\pm$ e Cos WdW

ह्यामध्ये बदल दर्शविण्यासाठी आपण d हे अक्षर वापरले आहे. तसेच W हा शब्द कोनीय गतीसाठी योजला आहे.

भास्कराचार्यांनी मुंजालचे हे सूत्र थोडे दुरूस्त केले आणि Cos W dW ह्यासाठी d(Sin W) अशी किंमत घेतली. भास्कराचार्यांनी केलेला हा बदल म्हणजे कॅलक्युलसचे पहिले पाऊल होते असे म्हणायला हरकत नाही. ह्या दुरूस्तीनुसार मुंजालचे सूत्र पुढीलप्रमाणे लिहिता येते.

du = dv $\pm$ e d (Sin W)

ह्या सूत्राचा उपयोग भास्कराचार्यांनी आयनिक वृत्ताची स्थिती निश्चित करण्यासाठी केला. कारण ग्रहणाचा अचुक काळा वर्तविण्यासाठी आयनिक वृत्ताची स्थिती निश्चित करावी लागते. वस्तुतः भास्कराचार्यांनी सुचविलेली ही दुरूस्ती हीच त्या काळातील खगोलशास्त्रामधील एक अत्यंत महत्वाची उपलब्धी होती. आणि खऱ्या अर्थाने भास्कराचार्य हा पहिलाच गणिती होता की ज्याला कॅलक्युसलसची पुसट का होईना, कल्पना आली होती. ह्या संबंधात आणखी पुरावे त्यांच्या सिद्धांत शिरोमणीत सापडतात.

★ ग्रहांच्या तात्कालिक गतीचे गणित करण्यासाठी त्यांच्या अनुक्रमाने येणाऱ्या स्थितींमधील काळ एका त्रुटीपेक्षा त्यांनी मोठा घेतलेला नाही. एक त्रुटी म्हणजे 1/33750 सेकंद हे आपण पाहिले आहेच. अर्थात भास्कराचार्यांनी अत्यंत अल्प काळाचे एकक घेऊन तात्कालिक गती दर्शविली आहे.

★ ज्यावेळी एखाद्या चलसंख्येची किंमत अधिकात अधिक होते त्यावेळी त्याचे

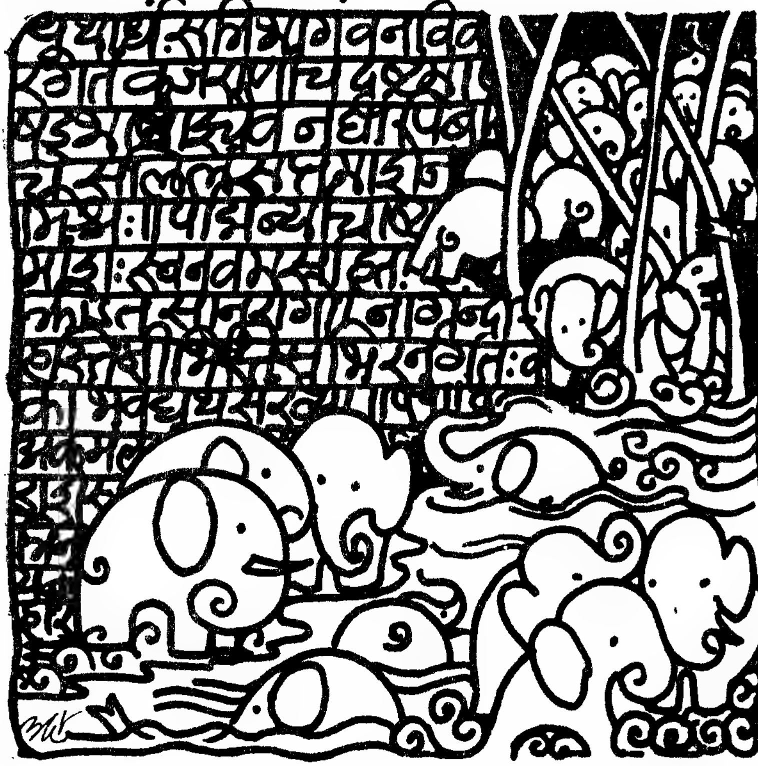
डिफरंशियल शून्य होते. ह्याची भास्कराचार्यांना कल्पना होती.

★ भास्कराचार्यांनी असेही सिद्ध केले की ज्यावेळी ग्रह पृथ्वीच्या संदर्भात उच्च किंवा नीच बिंदूपाशी असतो त्यावेळी त्याचे मंदफल म्हणजेच इक्वेशन ऑफ सेंटर शून्य असते. ह्या दोन बिंदूंच्यामध्ये असा एक बिंदू असतो की ज्या ठिकाणी मंदफलाच्या समीकरणाचे डिफरंशियल किंवा अवकलन शून्य असते.

भास्कराचर्यांनी पूर्णांशाने कॅलक्युलसचा शोध लावला नाही ही वस्तुस्थिती आहे, पण त्यांनी त्या दिशेने पाऊल उचलले होते हे निर्विवाद.

***

११



लीलावतीमधील काही मनोरंजक गणिते

लीलावती हा तसा बऱ्यापैकी मोठा ग्रंथ आहे. त्यामध्ये एकूण २६१ श्लोक असून त्याचे सुंदर मराठी भाषांतर मागील पिढीतील प्रा. नारायण हरी फडके यांनी केले आहे. १९७१ साली त्यांनी स्वतःच ते प्रकाशित केले होते. गणिताची आवड असणाऱ्या वाचकांनी त्यांचा हा ग्रंथ मुळातूनच वाचून काढावा आणि अवश्य

आपल्या संग्रही ठेवावा. लीलावतीमध्ये गुणाकार, भागाकार, वर्ग, वर्गमूळ, घन, घनमूळ अशा सर्व प्रारंभिक गणिती क्रिया तर आहेतच पण शिवाय क्षेत्रफळ, खतावणी, धान्याच्या राशींचे घनफळ, सावलीचे गणित असे अनेक व्यवहारिक विषयही आहेत, तसेच कुट्टक म्हणजे 'इन्‌डिटरमिनेट इक्वेशन ऑफ द फर्स्ट डिग्री' आणि अंकपाश म्हणजे 'परम्युटेशन व कॉम्बिनेशन' असे तुलनेने अवघड असलेले विषयही आले आहेत.

भास्कराचार्यांनी आपल्या ग्रंथात सिद्धता दिलेल्या नाहीत. पूर्वीच्या आचार्यांचा तसा रिवाज असावा असे दिसते, पण त्यामुळेच भास्कराचार्यांचे ग्रंथ समजून घेणे अवघड होऊन बसते. प्रस्तुत ग्रंथात लीलावतीचे संपूर्ण परिशीलन करणे शक्य नाही परंतू त्या ग्रंथातील मनोरंजक गणितांची मजा चाखायला मिळावी म्हणून पुढे काही गणिते दिली आहेत. ज्याला गणिताचे थोडेफार ज्ञान आहे असा वाचक ती सहजतेने सोडवू शकेल. या ठिकाणी निवडलेली गणिते 'पझल्स' किंवा कोड्यांच्या स्वरूपाची आहेत. आपली लेखणी उचला, डोक्याला थोडा त्रास द्या आणि पहा ही गणिते तुम्हाला सुटतात का!

एका जंगलात हत्तींचा एक फार मोठा कळप होता. त्यापैकी १/२ व १/२ चा १/३ हत्ती जंगलातील गुहेत जाताना मी पाहिले. एकंदर कळपाच्या १/६ व १/६ चा १/७ हत्ती नदीवर पाणी पीत होते. कळपाच्या १/८ व १/८ चा १/९ इतके हत्ती कमळांनी भरलेल्या सरोवरात क्रीडा करीत होते. आणि मदनाने विव्हळ झालेला एक हत्ती तीन हत्तीणींना झुलवित चालला होता तर त्या कळपात एकंदर किती हत्ती होते?

उत्तर : १००८ हत्ती

एका नवविवाहित दांपत्याच्या प्रेमकलहात युवतीच्या गळ्यातील मोत्याचा हार तुटला, त्यातील १/३ मोती घरंगळून जमिनीवर पडले. १/५ मोती बिछान्याच्या खाली जाऊन अडकले. १/६ मोती युवतीने वेचले आणि तिच्या प्रियकराने १/१० मोती शोधून काढले. सहा मोती मात्र हारातच अडकलेले दिसले, तर युवतीच्या गळ्यातील हारात किती मोती होते?

उत्तर : ३० मोती

हे मृगनयने प्रिये, एक भुंग्याचा समूह होता. त्यातील १/५ भुंगे कदंब वृक्षावर

गेले, १/३ शिलीन्ध्र वृक्षावर गेले. ह्या भुंग्यांच्या वजाबकीच्या तिप्पट भुंगे कुटज वृक्षापाशी घोटाळत होते. त्या ठिकाणी मालती व केतकी वृक्षांची बने होती. त्या दोहोंचा परिमल एकाच वेळी वातावरणात पसरला होता आणि वायूरूपी दूत तो सुंगध वाहून एका भुंग्याला देत होता त्यामुळे तो भुंगा सुवासाने संभ्रमित होऊन इकडून तिकडे व तिकडून इकडे असा आकाशात भटकत होता, तर एकंदर किती भुंगे होते ?

उत्तर : १५ भुंगे

एका प्रियकराने आपल्या प्रेयसीला अलंकार करण्यासाठी काही रत्ने दिली. कमलवत् नेत्र असलेल्या त्या कामिनीने त्यातील १/८ रत्नांचे आभूषण करून ते आपल्या भालप्रदेशावर घातले. त्यामधून उरलेल्या रत्नांच्या ३/७ भागाचा सर करून तिने तो आपल्या वक्षस्थळावर रूळेल असा परिधान केला. उरलेल्या रत्नांच्या १/२ रत्नांचा बाजूबंद बनवून तिने तो आपल्या दंडाला बांधला. उरलेल्याच्या ३/४ रत्नांमधून तिने किंकिणीयुक्त कमरपट्टा बनविला आणि १६ रत्नांची माळ बनवून तिने ती आपल्या वेणीत माळली, तर प्रियकराने तिला एकूण किती रत्ने दिली ?

उत्तर : २५६ रत्ने

हंस पक्षांचा एक समूह होता. वर्षाकालाचे आगमन झाल्यावर त्यातील वर्गमुळाच्या १० पट हंस मानस सरोवराकडे निघून गेले. समूहाच्या १/८ हंस सरोवराच्या काठाने उडत स्थल पद्मिनीच्या वनात उडून गेले. शेवटी हंसाची तीन जोडपी कोमल कमलांनी शोभिवंत सरोवरात जल क्रीडा करीत असताना आढळली तर हे बाले त्या समूहात किती हंस होते ?

उत्तर : १४४ हंस

कर्णाचा वध करण्यासाठी क्रोधमग्न झालेल्या अर्जुनाने बाणांचा एक समूह उचलला. त्यातील १/२ बाणांनी त्याने कर्णाचे सर्व बाण छेदून टाकले. वर्गमुळाच्या चौपट बाणांनी कर्णाचे घोडे ठार केले. शल्याला ६ बाण मारून यमसदनाला पाठविले. तसेच रथाचे छत्र, ध्वज व कर्णाचे धनुष्य यांचा प्रत्येकी एका बाणांनी नाश केला व सरतेशेवटी १ बाण मारून कर्णाचे शरीर उडविले, तर अर्जुनाने किती बाणांचे अनुसंधान केले ?

उत्तर : १०० बाण

एक भुंग्याच्या समूहातले अर्ध्याच्या वर्गमुळाइतके भुंगे मालती वृक्षावर गेले. काही वेळाने समूहाच्या ८/९ इतके भुंगेही मालतीकडे चालते झाले. उरलेल्या दोन भ्रमरातील एक सुवासलुब्ध भ्रमर कमळात अडकून आक्रोश करू लागला व त्याची प्रेयसी बाहेरून त्याला साद देऊ लागली, तर हे प्रिये समूहात एकूण किती भुंगे होते ?

उत्तर : ७२ भुंगे

चार व्यापारी होते. त्यापैकी एकाजवळ ८ माणके, दुसऱ्याजवळ १० इंद्रनील, तिसऱ्याजवळ १०० मोती व चौथ्याजवळ ५ हिरे होते. ते प्रवासाला निघाले असताना त्यांची मैत्री जमली व प्रत्येकाने आपल्या रत्नांमधील एकेक रत्न दुसऱ्याला दिले. त्यामुळे प्रत्येकाजवळील धन सारखे झाले तर हे मित्रा, त्या रत्नांच्या किमती काय होत्या ?

उत्तर : मोत्याची किंमत १ धरल्यास
माणिक : २४, इंद्रनील : १६
मोती : १, हिरा ९६

एक युवक आपल्या प्रेयसीला म्हणाला, 'तुझ्या कर्णविभूषणांसाठी मी ८ माणिके, १० नील आणि १०० मुक्ताफले विकत आणली आहेत. त्यामध्ये ८ माणिकांची जी किंमत आहे तितकीच १० नीलांची आहे व तेवढीच १०० मुक्ताफलांची किंमत आहे. एक माणिक, एक नील, व एक मुक्ताफल या तीन रत्नांची किंमत ४७ रुपये आहे, तर हे कल्याणिनी एकेका रत्नाची किंमत काय आहे सांगशील काय ?

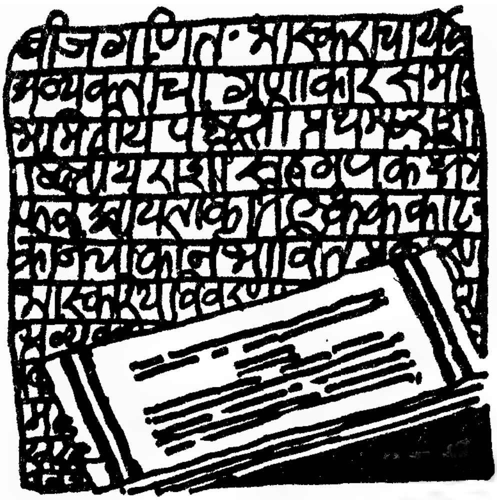
उत्तर : माणिक २५ रु, नील २० रु, मुक्ताफल २ रु

एका अरण्यामध्ये काही वानर होते. त्यापैकी अष्टमांशाच्या वर्गसंख्येइतके वानर आनंदाने भुभुःकार करीत होते. त्यांच्या फूत्कारांचे जे प्रतिध्वनी उमटले त्यामुळे पर्वतावरील १२ वानर आनंदित झाले, तर त्या अरण्यात एकूण वानर किती होते सांग बरं ?

उत्तर : वानर संख्या १६ किवा ४८

***

१२



भावित प्रकरण

भास्कराचार्यांनी बीजगणित या ग्रंथाचे शेवटी भावित नावाचे एक छोटे प्रकरण दिले आहे. भावित म्हणजे अनेक अव्यक्तांचा गुणाकार. विशेषतः भावित पद्धतीच्या एकाच समीकरणात दोन अव्यक्तांचा गुणाकार असतो. भावित समीकरणाचे उत्तर कसे शोधायचे याची भास्करीय पद्धत अत्यंत सोपी आहे. त्यांनी अशाप्रकारचे गणित भूमितीय पद्धतीने कसे सोडवायचे हेही स्पष्ट करून दिले आहे. समजा ट्रायल एरर वापरून असे समीकरण सोडवायचे झाले तर किती वेळ लागेल सांगत येत नाही. भास्करीय पद्धतीने मात्र अक्षरशः एका क्षणात भावित समीकरणाचे उत्तर मिळते एवढेच नव्हे तर एकाच वेळी अव्यक्तांची अनेक उत्तरे मिळतात.

भावितासाठी भास्करायाचार्यांनी पुढील गणित दिले आहे. 'ज्या दोन अव्यक्त राशींना ४ व ३ ह्या दोन संख्यांनी गुणून त्यांच्या बेरजेत २ मिळविल्यावर जी नवीन संख्या मिळेल ती त्याच दोन अव्यक्त राशींच्या गुणाकाराबरोबर असेल, तर त्या दोन राशी कोणत्या?'

समजा, प्रथम राशी = A आणि द्वितीय राशि = B तर वरील गणिताप्रमाणे

$$4A + 3B + 2 = AB$$

ह्या समीकरणातील A, B ह्यांच्या किंमती आपल्याला पाहिजे आहेत.

वरील समीकरण सोडविण्याची भास्करीय पद्धत अशी

★ A आणि B ह्यांच्या सहगुणाकांचा म्हणजे 4 व 3 यांचा गुणाकार करा व समीकरणातील 2 त्यात मिळवा. आपल्याला उत्तर मिळते, 4 x 3 + 2 = 14

★ मिळालेल्या 14 ह्या उत्तराचे दोन गुणक पाडा, ते आहेत 1 x 14 आणि 2 x7

★ आता मिळालेले गुणक व A आणि B ह्यांची पुढीलप्रमाणे मांडणी व बेरीज करा

$$\begin{array}{r} 4 \\ +\ 1 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ +\ 14 \\ \hline 17 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 3 \\ +\ 1 \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ +\ 14 \\ \hline 18 \end{array}$$

बस्स ! आपल्याला A आणि B ह्यांच्याप्रमाणे किमती मिळाल्या आहेत त्या अशा :

A = 17, B = 5

A = 14, B = 18

★ ह्याच पद्धतीने 14 चे दुसरे गुणक व A व B ह्यांचे सहगुणक ह्यांची बेरीज करा

$$\begin{array}{r} 4 \\ +\ 2 \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ +\ 7 \\ \hline 10 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 3 \\ +\ 2 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ +\ 7 \\ \hline 11 \end{array}$$

A आणि B ह्यांच्या दुसऱ्या किंमतीचा गट असा आहे.

A = 10, B = 6

A = 5, B = 11

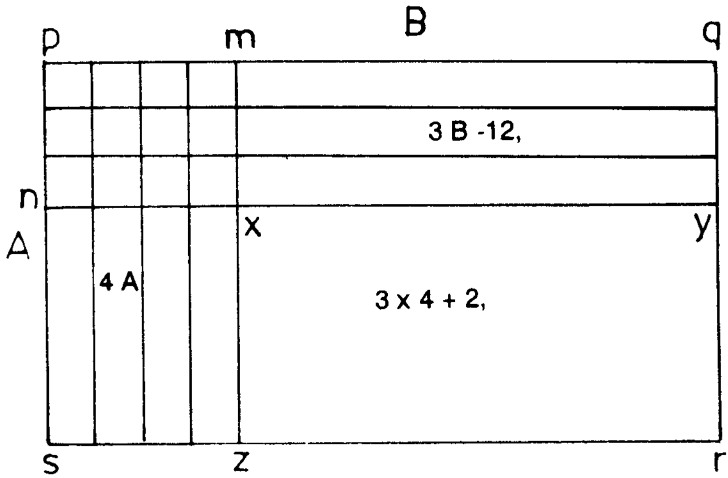
★ अशा प्रकारे सहगुणकांचा गुणाकार व समीकरणात असलेली स्थिर संख्या ह्यांचे दोन संख्यात्मक जेवढे गुणक मिळतील तेवढ्या A आणि B ह्या अव्यक्तांच्या किमती काढता येतील.

वरील उदाहरण भास्कराचार्यांनी भूमितीचा उपयोग करून सोडवून दिले आहे. अशी पद्धत प्राचीन ग्रीक गणितात रूढ होती. भौमित्तीक बीजगणित असे या प्रकाराला नाव देता येईल.

★ A रूंदी आणि B लांबी असलेला एक काटकोन चौकोन काढा

★ त्यामध्ये 4 x A एवढे क्षेत्रफळ आखा.

★ तसेच 3 x B एवढे क्षेत्रफळ आखून घ्या.



★ परंतू 3 x B मधील, 12 एकक एवढे क्षेत्रफळ 4 x A ह्या क्षेत्रफळात पडते. त्यामुळे 4xA च्या बाहेर 3B - 12 एवढे क्षेत्रफळ व मूळ काटकोन चौकोनाचा काही भाग शिल्लक रहातो.

★ काटकोन चौकोनोच्या शिल्लक राहिलेल्या आयताकृती भागाचे क्षेत्रफळ, 12 आणि समीकरणातील 2 म्हणजे 14 एकक असले पाहिजे. ह्या आयताची एक बाजू गृहित धरली तर दुसरी आपोआप मिळते. उदाहरणार्थ एक बाजू 1 एकक धरली तर दुसरी 14 असली पाहिजे किंवा एक बाजू 2 एकक धरली तर दुसरी 7 असली पाहिजे.

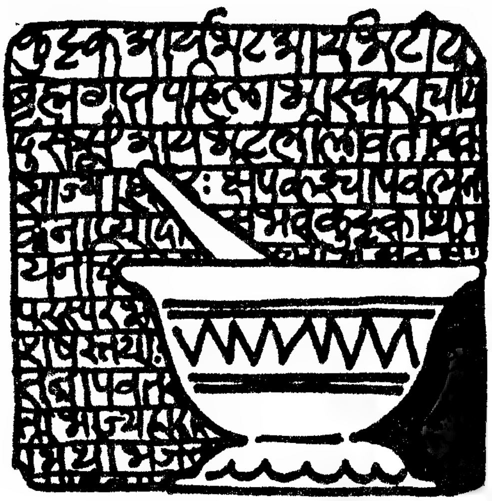
★ - आकृतीमध्ये हा आयत XYRZ असा दर्शविला आहे. त्यामंध्ये XZ = 1 आणि XY = 14 किंवा XZ = 2 आणि XY = 7 अशा किंमती धरता येतील.

★ समजा XZ = 1 आणि XY = 14 अशा किंमती घेतल्या तर
चौरसाची रुंदी = A = mZ = mX + xZ = 3 + 1 = 4
चौरसाची लांबी = B = p Q = nY = nX + XY = 4 + 14 = 18
म्हणजेच A = 4 आणि B = 18
अशाच पद्धतीने A आणि B ह्यांच्या इतर किमती निश्चित करता येतील.

भावित प्रकारचे भास्करीय विवरण आणि अव्यक्तांच्या किंमती निश्चित करण्याची पद्धत पाहून त्यांच्या कुशल गणिती बुद्धिमत्तेला दाद द्यायला हरकत नाही.

***

१३



कुट्टक

भारतीय गणितातील कुट्टक हा काय प्रकार आहे याबद्दल आपल्यापैकी बऱ्याच जणांना कुतुहल असते. कुट्टक म्हणजे काहीतरी अघटीत गणिती क्रिया असावी, असा त्यांचा समाज असतो. वस्तुस्थिती मात्र तशी नाही. पाश्चात्य गणितात ज्याला 'इन्डिटरमिनेट इक्वेशन ऑफ् फर्स्ट डिग्री' असे म्हणतात त्यालाच प्राचीन भारतीयांनी कुट्टक असे नाव दिले आहे. अशा समीकरणांना 'डिओफान्टस लिनीअर इक्वेशन' असेही म्हणतात. प्राचीन भारतीय गणितज्ञांच्या दृष्टीने कुट्टक हे एक अत्यंत महत्त्वाचे समीकरण म्हणून मानले जात असे कारण अनके वेळा त्याचा उपयोग खगोलशास्त्रतील गणनासाठी करण्यात येई. पहिल्या आर्यभटाने प्रथम कुट्टक सोडविण्याची पध्दत आपल्या आर्यभटीय ह्या ग्रंथात दिली. त्यानंतर ब्रम्हगुप्त, पहिला भास्कराचार्य, दुसरा आर्यभट या सर्वांनी कुट्टकाची विस्तृत चर्चा आपापल्या ग्रंथात केली होती. भास्कराचार्यांनी कुट्टक सोडविण्याची एक अत्यंत अभिनव पध्दत लीलावतीमध्ये दिली आहे. त्यांची पध्दत अत्यंत सुलभ आहे. अन्यथा इन्डिटरमिनेट इक्वेशन किंवा कुट्टक सोडविणे वाटते तिके सोपे काम नाही.

कुट्टक याचा अर्थ कुटणे, पीठ करणे, चूर्ण करणे असा आहे. पाश्चात्यांनी भारतीयांच्या हे विशिष्ट समीकरण सोडविण्याच्या पध्दतीला 'पल्व्हरायझर' असे नाव दिले आहे. कुट्टकाचे अनेकविध प्रकार आहेत. त्यापैकी फक्त एकाच प्रकारचे

समीकरण येथे आपण पहाणार आहोत. हे सर्वसामान्य समीकरण असे आहे.

$$Ax + B = Cy$$

ह्या समीकरणातील A, B आणि C ह्या धन पूर्णांक संख्या आहेत व x आणि y ह्या अव्यक्त संख्यांच्या किमती आपल्याला काढायच्या आहेत. वर दिलेल्या मूळ समीकरणापासून अशी नवनवीन समीकरणे तयार करायची की x आणि y ह्या अज्ञात संख्यांचे सहगुणक लहान-लहान होत जावेत, ह्या अर्थाने वरील समीकरण सोडविण्याच्या पध्दतीला कुट्टक असे नाव देण्यात आले असावे.

भास्कराचार्यांनी कुट्टकासाठी एक परिभाषा दिली आहे ती अशी.

A = भाज्य, B = क्षेपक, C = हार

वरील समीकरण पुढील प्रमाणेही लिहिता येते,

$$\frac{Ax + B}{C} = y$$

हे समीकरण सोडविण्याची भास्करीय पध्दत पहाण्यासाठी त्यानीच दिलेले एक उदाहरण आपण घेऊ.

'ज्या संख्येला १०० ने गुणून आलेल्या गुणाकारामध्ये ९० मिळविले आणि त्या बेरजेला ६३ ने भागले तर भागाकर पूर्ण धन संख्या आली पाहिजे तर ती संख्या कोणती'

भास्कराचार्यांनी दिलेले उदाहरण असे आहे.

$$\frac{100x + 90}{63} = y$$

त्यामधील x आणि y ह्यांच्या पूर्ण धन संख्या (पॉझिटिव्ह इंटिग्रल) असलेल्या किंमती आपल्याला हव्या आहेत. भास्करार्चांच्या परिभाषेप्रमाणे आपल्या उदाहरणात,

भाज्य = A = 100, क्षेपक = B = 90, हार = C = 63

भास्कराचार्यांच्या पध्दतीत 100 आणि 63 ह्या दोन संख्यापासून निरंतर भागाकाराला प्रारंभ करायचा आहे. प्रारंभी 100 हा अंश व 63 हा छेद असेल आणि भागाकार 1 येऊन बाकी 37 राहील, पुढल्या वेळी 63 ही संख्या अंशस्थानी घेऊन 37 ही बाकी छेदस्थानी घ्यायची व पुन्हा भागाकार करायचा म्हणजे भागाकार 1 येऊन बाकी 26 येईल. नंतर 37 आणि 26 ह्यांचा भागाकार करायचा आणि ही क्रिया बाकी 1 येईपर्यंत निरंतर करीत रहायची. आपले निष्कर्ष पुढे दिलेल्या कोष्टकाप्रमाणे असतील.

अंश/छेद	बाकी	भागाकर
100/63	37	1
63/37	26	1
37/26	11	1
26/11	4	2
11/4	3	2
4/3	1	1

शेवटी बाकी 1 झाल्यामुळे आपली निरंतर भागाकाराची क्रिया संपली. आता आपल्याला जे भागाकार मिळाले आहेत त्यामध्ये 90 हा क्षेपक व शून्य शेवटी घेऊन पुढीलप्रमाणे संख्या श्रृंखला लिहून काढा.

1 / 1 / 1 / 2 / 2 / 1 / 90 / 0

नंतर ह्या शृंखलेवर पुढीलप्रमाणे गणिती क्रिया करा.

★ 90 ने त्याच्या डावीकडील 1 ला गुणा व येणाऱ्या गुणाकारात उजवीकडील शून्य मिळवा व नंतर शृंखलेतील शून्य काढून टाका. आपल्याला मिळणारे उत्तर असे आहे.

1 / 1 / 1 / 2 / 2 / 1 x 90 + 0/90

★ 1 x 90 ह्या संख्येने डावीकडील 2 ला गुणा त्यात उजवीकडील 90 मिळवा व नंतर तो शृंखलेतून काढून टाका.

1 / 1 / 1 / 2 / 2 x 90 + 90 / 1 x 90

किंवा 1/1/1/2/ 3 x 90 / 1 x 90

★ 3 x 90 ह्या संख्येने त्याच्या डावीकडील 2 ला गुणा व त्यात उजवीकडील 1 x 90 मिळवा व नंतर ही संख्या शृंखलेतून काढून टाका.

1 / 1 / 1 / 2 x 3 x 90 + 1 x 90/ 3 x 90

1/1/1/ 7 x 90 / 3 x 90

★ वरील गणिताची पुनरुक्ती 2 संख्या मिळेपर्यंत करीत रहा आपल्याला मिळणारी उत्तरे क्रमाने पुढीलप्रमाणे असतील.

1/1/10 x 90 / 7 x 90

1/17 x 90 / 10 x 90

27 x 90 / 17 x 90

2430/1530

अशा प्रकारे आपल्याला 2430 आणि 1530 ह्या दोन संख्या मिळाल्या

आहेत, त्यापैकी पहिल्या संख्येला 100 ने म्हणजेच मूळ भाज्याने भागा म्हणजे बाकी ३० उरते. तसेच 1530 ह्या संख्येला 63 ने म्हणजेच मूळ हाराने भागा म्हणजे बाकी 18 उरते. 30 ही बाकी म्हणजेच आपल्या मूळ समीकरणातील y ह्या अव्यक्त संख्येची किंमत आणि 18 ही बाकी म्हणजेच x ह्या अव्यक्ताची किंमत आहे. भास्कराचार्यांच्या परिभाषेप्रमाणे 30 ही लब्धी आणि 18 हा गुण आहे. x = 18 आणि y = 30 ह्या किमती आपले समीकरण अचुकपणे सोडविते.

$$100x+90=63y$$

$$100x18+90=63x30$$

$$1890=1890$$

वस्तुतः x आणि y ह्यांच्या कित्येक किंमती वरील समीकरण अचुकपणे सोडवू शकतात त्यासाठी आपल्याला x आणि y ह्यांच्या समान संख्येने वाढत जाणाऱ्या श्रेढी बनविता येतील. त्यासाठी सोपी पध्दत अशी.

समजा x1, x2 आणि y1, y2 ह्या x आणि y ह्यांच्या एकामागोमाग येणाऱ्या किंमती असतील तर आपल्याला मूळ समीकरण पुढीलप्रमाणे लिहिता येईल.

$$100x1+90=63y1$$

$$100x2+90=63y2$$

$$\therefore \quad 100(x2-x1)=63(y2-y1)$$

हे समीकरण बरोबर येण्यासाठी (x2-x1) व (y2-y1) ह्यांच्या किंमती पुढीलप्रमाणे असाव्या लागतील

$$x2-x1=63$$

$$y2-y1=100$$

ह्या अर्थ x च्या पुढील व मागील किंमतीमध्ये 63 चा फरक असावा लागेल आणि y च्या पुढील व मागील किंमतीत 100 चा फरक असावा लागेल. यावरून आपल्याला x आणि y ह्यांच्या पुढीलप्रमाणे श्रेढी मिळतील.

x = 18, 81, 144, 207.....

y = 30, 130, 230, 330.....

आपण प्रारंभी घेतलेल्या समीकरणाची कुट्टक पध्दतीने आलेली उत्तरे आपल्याला मिळाली आहेत. पण वर वर साधे वाटणारे समीकरण सोडविण्यासाठी किती खटाटोप करावा लागतो ह्याचा तुम्हाला अंदाज आलाच असेल. खरं म्हणजे कुट्टक हा तसा मोठा विषय आहे. त्यावर कुट्टक शिरोमणी असा एक ग्रंथच उपलब्ध आहे. ह्या ठिकाणी आपल्याला कुट्टकाची केवळ झलक पहाणेच शक्य आहे.

***

१४



चक्रवाल

फरमॅट नावाचा एक सुप्रसिध्द पाश्चात्य गणिती होऊन गेला. १६५७ साली त्याने फ्रेनिक्ले डी बेसी ह्या आपल्या मित्राला एक आव्हानात्मक गणित घातले. ते गणित असे होते.

$$61x^2 + 1 = Y^2$$

या समीकरणातील x आणि y ह्या अव्यक्तांच्या किंमती अशा शोधून काढायचा की त्या लहानात लहान असल्या पाहिजेत. x आणि y ह्यांच्या लहानात लहान किंमती येतात.

x = 226153980

y = 1766319049

डा बेसीला फरमॅटचे आव्हान झेपले नाही. पुढे १०० वर्षांनी हे गणित लॅग्रान्ज ह्या विख्यात गणितज्ञाने सोडविले. लॅग्रान्जच्या पध्दतीप्रमाणे वरील गणित सोडविण्यासाठी निरंतर गुणोतरांची २१ पदे. लागतात.

आश्चर्याची गोष्टी अशी हेच गणित बरोबर ५०० वर्षांपूर्वी म्हणजे ११५० साली भास्कराचार्यांनी 'कमीत कमी पदांचा उपयोग करून पूर्णपणे सोडविले होते. वरील प्रकारची समीकरणे सोडविण्याच्या पध्दतीला भास्कराचार्यंनी 'चक्रवाल' असे नाव दिले आहे. चक्रवाल म्हणजे चक्रीय पध्दत. अगोदरच्या समीकरणातून मिळालेले उत्तर पुढील समीकरणात घालून नवीन उत्तरे शोधायची ती पुन्हा पुढच्या समीकरणात घालायची अशा प्रकारे सरते शेवटी पाहिजेत तशी उत्तर मिळवायची अशी ही पद्धत आहे.

वर दिलेल्या समीकरणाचे सामान्य रूप आहे.

$$Nx^2 + k = y^2$$

त्यामधील K ची किंमत $\pm$ 1, $\pm$ 2 किंवा $\pm$ 4 असू शकते ह्या समीकरणाला 'इन्डिटरमिनेट क्वॅड्रॅटिक इक्वेशन' किवा 'डिओफान्टस् सेकंड ऑर्डर इक्वेशन' असे नाव आहे. हे समीकरण सोडविणे अत्यंत अवघड आहे.

भास्कराचार्य दिलेल्या समीकरणापासून एक पूरक समीकरण तयार करतात, त्याचा सामान्य प्रकार असा आहे.

$$Na^2 + K = b^2$$

त्यानंतर भास्कराचार्य स्वतःचे एक पूर्व प्रमेय व ब्रम्हगुप्ताचे पूर्व प्रमेय वापरून अगदी मोजक्या पदात दिलेल्या समीकरणाचे उत्तर मिळवितात. पूरक समीकरणाच्या साह्याने तयार केलेले भास्कराचार्यांचे पूर्व प्रमेय असे.

$$N\left(\frac{am + b}{k}\right)^2 + \frac{m^2 - N}{k} = \left(\frac{bm + Na}{k}\right)^2$$

जर x आणि y च्या कमीत कमी पूर्णांक किमती हव्या असतील तर $(m^2 - N)$ ह्या कंसाची धन पूर्णांक किंमत कमीत कमी असायला हवी अशी भास्कराचार्यांची सूचना आहे.

ब्रह्मगुप्ताचे पूर्व प्रमेय आहे. (ही दोन्ही पूर्वप्रमेये परिशिष्टात दिली आहेत.)

$$N\,(a1\ b2 \pm a2\ b1)^2 + k1\ k2 = (b1\ b2 \pm N\ a1\ a2)^2$$

ह्या समीकरणातील a1 आणि b1 व a2 आणि b2 ही $Nx^2 + k1 = y^2$ आणि $Nx^2 + k2 = y^2$ ह्यांची उत्तरे आहेत.

आता भास्कराचार्यांनी दिलेले समीकरण कसे झटपट सोडिविले पहा.

$$61\,x^2 + 1 = y^2$$

ह्या समीकरणासाठी त्यांनी

$$61 \times 1^2 + 3 = 8^2$$

असे पूरक समीकरण तयार केले व आपल्या पूर्वप्रमेयातील a, b आणि k ह्यांच्या नव्या किंमती मिळविल्या, त्या अशाः

$$a = 1,\ b = 8,\ k = 3$$

त्यावरून त्यांचे पूर्व प्रमेय होईल,

$$61\left(\frac{m + 8}{3}\right)^2 + \frac{m^2 - 61}{3} = \left(\frac{8m + 61}{3}\right)^2 \qquad (1)$$

ह्या समीकरणातील $m^2 - 61$ ह्याची धन कमीत कमी असणे आवश्यक आहे. त्यासाठी (m + 8)/3 ह्याची किंमत पूर्णांकात असायला हवी किंवा m ची किंमत पूर्णांक असली पाहिजे.

$$\therefore \quad \frac{m+8}{3} = \text{पूर्णांक}$$

हे कुट्टका सारखेच समीकरण आहे त्यातील m ची कींमत 1, 4, 7, 10 ..... अशा प्रकारची असेल तरच उजवी बाजू पूर्णांक येईल. त्यावरून m ची सामान्य किंमत पुढील सूत्रा प्रमाणे लिहिता येईल.

$$m = 3 \times t + 1$$

ह्या मधील t = 0, 1, 2, 3 ..... अशा किंमती घेतल्या तरच m = 1, 4, 7, 10 ...... अशा किंमती मिळतील त्यामधून $(m^2 - 61)$ कमीत कमी धनपूर्णांक येण्यासाठी m ची किंमत 7 घ्यावी लागेल, म्हणजे t = 2 अशी किंमत येईल. m = 7 ही किंमत (1) क्रमांकाच्या समीकरणात घातली की आपल्याला पुढील समीकरण मिळेल.

$$61 \times 5^2 - 4 = 39^2$$

दोन्ही बांजूना 4 ने भागल्यावर

$$61 \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 1 = \left(\frac{39}{2}\right)^2 \qquad (2)$$

हुबेहुब असेच आणखी एक समीकरण गृहित धरून ब्रम्हगुप्ताचे पूर्व प्रमेय वापरले तर आपल्याला.

a1 = a2 = 5/2, b1 = b2 = 39/2, आणि k1 = k2 = -1 अशा किंमती मिळतील व त्या सदरहू पूर्वप्रमेयात वापरल्या की पुढील समीकरण निष्पन्न होईल.

$$61 \left(2 \times \frac{5}{2} \times \frac{39}{2}\right)^2 + 1 = \left\{\left(\frac{39}{2}\right)^2 + 61 \left(\frac{5}{2}\right)^2\right\}^2$$

किंवा,

$$61 \left(\frac{195}{2}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1523}{2}\right)^2 \qquad (3)$$

आता समीकरण क्रमांक (2) व (3) ह्यांच्यासाठी पुन्हा ब्रम्हगुप्ताच्या पूर्व प्रमेयाचा वापर करूयां. म्हणजे पुढील समीकरण मिळेल.

$$61 \left(\frac{5}{2} \times \frac{1523}{2} + \frac{195}{2} \times \frac{39}{2}\right) + (1 \times -1) = \left(\frac{39}{2} \times \frac{1523}{2} + 61 \times \frac{5}{2} \times \frac{195}{2}\right)^2$$

$$61\left(\frac{7615}{4}+\frac{7605}{4}\right)-1=\left(\frac{59397}{4}+\frac{59475}{4}\right)^2$$

$61\ (3805)^2 - 1 = (29718)^2$ **(4)**

सरते शेवटी समीकरण क्रमांक (2) प्रमाणे (4) सारखेच दुसरे हुबेहुब समीकरण आहे असे गृहीत धरून त्याला ब्रम्हगुप्ताचे पूर्व प्रमेय आयोजित करू आपले अंतिम समीकरण पुढील प्रमाणे असेल.

$61\ (2 \times 3805 \times 29718)^2 + = (29718^2 + 61 \times 3805^2)^2$

$61\ (226153980)^2 + 1 = (1766319049)^2$

ह्या अंतिम समीकरणाची दिलेल्या समीकरणाशी तुलना केली की x आणि y या अव्यक्तांच्या पुढील किंमती निष्पन्न होतात.

$x = 226153980$

$y = 1766319049$

तर अशी आहे भास्कराचार्यांची चक्रवाल पध्दत. ह्या पध्दतीमध्ये भास्कराचार्यांचे व ब्रम्हगुप्ताचे अशी दोन पूर्वप्रमेय गृहीत धरली आहेत. जिज्ञासूंसाठी ह्या दोन पूर्वप्रमेयांच्या सिध्दता ग्रंथाचे शेवटी परिशिष्ट मध्ये दिल्या आहेत.

अशाच पध्दतीचे गणित सोडविण्याची आपली तयारी असेल तर पुढे दिलेल्या समीकरणातील x आणि y ह्या अव्यक्तांच्या किमंती शोधून काढा.

$$67x^2 + 1 = y^2$$

उत्तर : $x = 5967$
$y = 48842$

$Ax^2 + 1 = y^2$ अशा प्रकारच्या समीकरणांना पाश्चात्य गणिती 'पेल्स इक्वेशन' या नावाने ओळखतात. खरं म्हणजे अशा समीकरणांना 'भास्कराचार्य इक्वेशन' असे सुयोग्य नाव द्यायला हवे, कारण अशी समीकरणे सोडविण्यासाठी पहिली परिपूर्ण पध्दत भास्कराचार्यांनीच शोधून काढली. भास्कराचार्यांची चक्रवाल पध्दत हा गणितातील अत्यंत उच्च दर्जाचा शोध आहे. पुढे जवळ जवळ चारशे पाचशे वर्षांनंतर गॅलॉय, ऑयलर, लॅग्रान्ज वगैरे पाश्चात्य गणितज्ञांची वरील समीकरण सोडविण्याच्या पध्दतीचे पुनरसंशोधन केले. अशा एका समीकरणाची अनेक उत्तरे शोधून काढणे हे भास्करार्चांच्या पध्दतीचे खास वैशिष्टय आहे. ह्या संशोधनाचे श्रेय

पाश्चात्य गणिती भास्कराचार्यांना द्यायला तयार नाहीत, ही गोष्ट समजू शकते कारण एकंदरच हिंदू शास्त्रांकडे पहाण्याचा त्यांचा दृष्टिकोन पूर्वग्रहदूषित आहे. परंतु दुर्दैवाची गोष्ट अशी की आम्हा भारतीयांनाही त्याचा अभिमान नाही.

तरीही दोन पाश्चात्य गणितज्ञांचे या संबंधातील उद्गार नोंदवून ठेवायला हरकत नाही. हॅन्केल लिहितो,

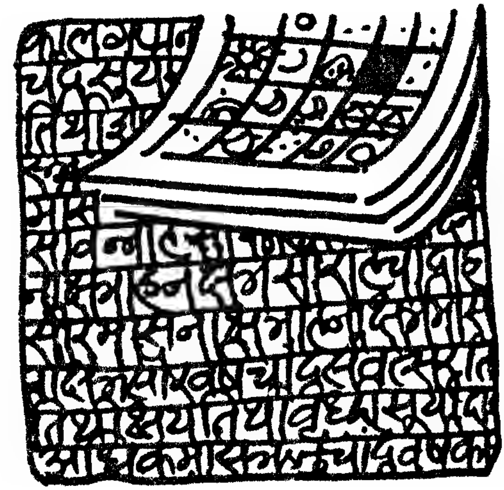
"The learned Brahmins of Hindustan are the real inventors of Algebra"

कार्ल बॉयीर आपल्या 'अ हिस्टरी ऑफ मॅथॅमॅटिक्स' या पुस्तकात म्हणतो 'In connection with the pell equiation $Ax^2 + 1 = y^2$, Bhaskara gave particular solutions for the five cases. A = 8, 11, 32, 61 and 67 for 61 $x^2 + 1 = y^2$ for example he gave the solutions x = 226153980 and y = 1, 776,319,049 this is an impressive feet in calculations and its verifications alone will tax the efforts of the reader'

***

१५

कालगणना



खगोलशास्त्रात कालगणनेसाठी विविध प्रकारचे दिवस आणि महिने वापरले जातात. भारतीय कालनिर्णयात चंद्र आणि सूर्य यांच्या गतींची सांगड घातलेली असते. याचे कारण असे की चंद्राच्या कलांवरून चांद्रमहिना प्रत्यक्ष मोजता येतो आणि सूर्योदयाच्या वेळी असणाऱ्या सूर्याच्या स्थितीवरून ऋतूंचा अंदाज बांधता येतो. तिथी हा प्रकार तर भारतीय कालनिर्णयातील एक वैशिष्ट्यपूर्ण गोष्ट आहे. जगातील इतर कोणत्याही संस्कृतीत तिथीला महत्व नाही. भारतीय तिथी ही एक अत्यंत शास्त्रशुध्द संकल्पना आहे. नुसत्या तिथीवरून अनेक प्रकारचे खगोलशास्त्रीय अंदाज करता येतात. भारतीय खगोलशास्त्र शिकायचे असेल तर सूर्य चंद्रांशी निगडीत असलेले महिने व तिथी यांची परिपूर्ण माहिती हवीच. भास्कराचार्यांच्या ग्रंथात ह्या सर्व प्रकारच्या दिवसांचा आणि महिन्यांचा यथायोग्य उपयोग करण्यात आला आहे. निरनिराळे भारतीय दिवस आणि महिने पुढे दिले आहेत.

१) सावन दिन : सावन्नाह किंवा सिव्हिल डेः

दिलेल्या स्थानी एका सूर्योदयापासून दुसऱ्या सूर्योदयापर्यंतच्या काळाला सावन दिन असे नाव आहे. एकाच स्थानीसुध्दा ह्या दिवसाचा काळ स्थिर रहात नाही. तो

दररोज बदलतो. सावन दिवसांच्या सरासरी काळाला मध्यम सौर दिन किंवा मध्यम सावन्नाह असे म्हणतात. सावन दिवसाला कुदिन असेही एक तांत्रिक नाव आहे.

२) नाक्षत्राह : सिडेरिअल डे

दिलेल्या स्थानी विशिष्ट ताऱ्याच्या एका उदयापासून दुसऱ्या उदयापर्यंतचा काळ. आधुनिक नाक्षत्र दिनापेक्षा हिंदू नाक्षत्राह थोडा निराळा आहे. वसंतसंपात बिंदूच्या लागोपाठ होणाऱ्या दोन उदयांमधील कालांतर म्हणजे आधुनिक नाक्षत्र दिन.

३) नक्षत्र : चंद्राची दैनंदिन स्थिती

भारतीय खगोलशास्त्रात राशीचक्राचे एकंदर २७ विभाग पाडण्यात आले आहेत. प्रत्येक भाग १३.३३ अंशाचा असतो. ह्या प्रत्येक भागाला नक्षत्र असे नाव आहे. विशिष्ट क्षणी चंद्र ज्या नक्षत्रात असेल ते चालू नक्षत्र आहे, असे मानण्यात येते. चंद्राला १३.३३ अंश आक्रमण करायला जेवढा काळ लागतो, तोच एका नक्षत्राचा काळ असतो चंद्राला पृथ्वीभोवती एक प्रदक्षिणा पूर्ण करायला सुमारे २७.३ दिवस लागतात त्यामुळे एका नक्षत्राचा काळ साधारण एका दिवसा एवढा असतो. चंद्राची गती समान नसल्यामुळे नक्षत्राचा काळ बदलता असतो.

सौराह : सौर दिन किंवा सोलर डे

पृथ्वीला सूर्याभोवती एक प्रदक्षिणा घालायला लागणारा काळ किंवा निराळ्या अर्थाने सूर्याला पृथ्वीभोवती एक प्रदक्षिणा पूर्ण करायला लागणारा काळ म्हणजे सौर वर्ष. हे वर्ष ३६० समान भागात विभागण्यात येते. त्यातील प्रत्येक भागाला सौराह असे म्हणतात.

चांद्राह : चांद्र दिन किंवा तिथी

सूर्य आणि चंद्र यांच्या दोन लागोपाठ होणाऱ्या युतींच्या काळाला चांद्रमास किंवा ल्युनेशन असे नाव आहे. त्याचे ३० समान विभाग करण्यात येतात. प्रत्येक विभागला तिथी किंवा चांद्राह असे म्हणतात. चंद्राला सूर्याच्या पुढे १२ अंश जाण्यासाठी जो काळ लागतो त्याला तिथी असे नाव आहे. तिथींचा काळ समान नसतो. तिथीचा सरासरी काळ माध्यम सौर दिनापेक्षा थोडा लहान आहे.

सौर मास : नाक्षत्र सौर मास

राशीचक्राचे १२ समान भाग पाडण्यात आले आहेत. प्रत्येक भाग ३० अंशाचा असतो त्यांना अनुक्रमे मेष, वृषभ, मिथुन, कर्क, सिंह, कन्या, तूळ, वृश्चिक, धनू, मकर, कुंभ, मीन अशा संज्ञा आहेत. सूर्याला एक राशी ओलांडण्यासाठी जो काळ लागते त्याला सौर मास म्हणतात. ह्या महिन्यांचा काळ बदलता असतो. कारण सूर्याची आयनिक वृत्तावरील गती समान नसते.

नाक्षत्र मास:

विशिष्ट ताऱ्यांच्या संदर्भात चंद्राला पृथ्वी भोवती एक प्रदक्षिणा पूर्ण करण्यास लागणाऱ्या काळाला नाक्षत्र मास अशी संज्ञा आहे.

नाक्षत्र सौर वर्ष:

भारतीय मेष राशीचा प्रारंभबिंदू लागोपाठ दोन वेळा ओलांडण्यासाठी सूर्याला जो काळ लागते त्याला नाक्षत्र सौर वर्ष म्हणतात. भास्कराचार्यांनी हा काळ ३६५ दिवस १५ घटी, ३० पळे, २२ विपळे, ३० प्रती विपळे दिला आहे.

दशांश अपूर्णांकात हा काळा होतो, ३६५.२५८४३७५

चांद्र संवत्सर : (ल्युनी सोलर इयर)

चांद्रमानाप्रमाणे एक महिना म्हणजे चांद्रमास असे १२ चांद्रमास म्हणजे एक चांद्रसंवत्सर. चांद्रसंवत्सर नाक्षत्र सौर वर्षापेक्षा सुमारे ११ दिवसांनी लहान आहे.

तिथीक्षय आणि तिथीवृध्दी

तिथी हा भारतीय कालगणनेतील एक वैशिष्ट्यपूर्ण कालखंड आहे. अनेकदा तिथीची पुनरावृत्ती किंवा क्षय झाल्याचे आढळते. तिथीची पुनरावृत्ती म्हणजेच तिथीवृध्दी आणि तिची अनुपस्थिती म्हणजे तिथीक्षय अशा विशिष्ट दिवसाला क्षयाह असे नाव देतात.

चंद्राची सरासरी दैनंदिन गती १३.३ अंश मानली असली तरी तो पृथ्वीभोवती दीर्घवर्तुळाकार कक्षेत भ्रमण करती असल्यामुळे त्याची गती कमीतकमी ११.३ अंश ते अधिकाधिक १५.३ अंश ह्या मर्यादित बदलते. एक तिथी पूर्ण होण्यासाठी चंद्र व सूर्य यांचेमध्ये १२ अंशाचे कोनात्मक अंतर पडावे लगते पण त्यासाठी लागणारा काळ चंद्राच्या बदलत्या गतीमुळे २० तासापासून

२८ तासापर्यंत कितीही असतो. आपल्या धर्मशास्त्राप्रमाणे सूर्योदयाच्या वेळी जी तिथी चालू असेल तीच धार्मिक कृत्यासाठी वापरायची. मग त्या तिथीचा राहिलेला काळ कितीही लहान असो. एखादी तिथी २४ तासांपेक्षा मोठी असेल तर ती एक सूर्योदयाच्या आधी सुरू होईल व दुसऱ्या सूर्योदयानंतर काही तासांनी संपेल आणि वरील नियमाप्रमाणे दोन्ही दिवशी एकच तिथी राहील. हे झाले तिथी वृध्दीचे उदाहरण. या उलट विशिष्ट तिथी २४ तासापेक्षा लहान असेल तर ती एका सूर्योदयानंतर चालू होईल व दुसऱ्या सूर्योदयाच्या आधी संपेल. म्हणजे ती तिथी कोणत्याच सूर्योदयाचे वेळी असणार नाही व त्या तिथीचा क्षय होईल.

अधिक मासः

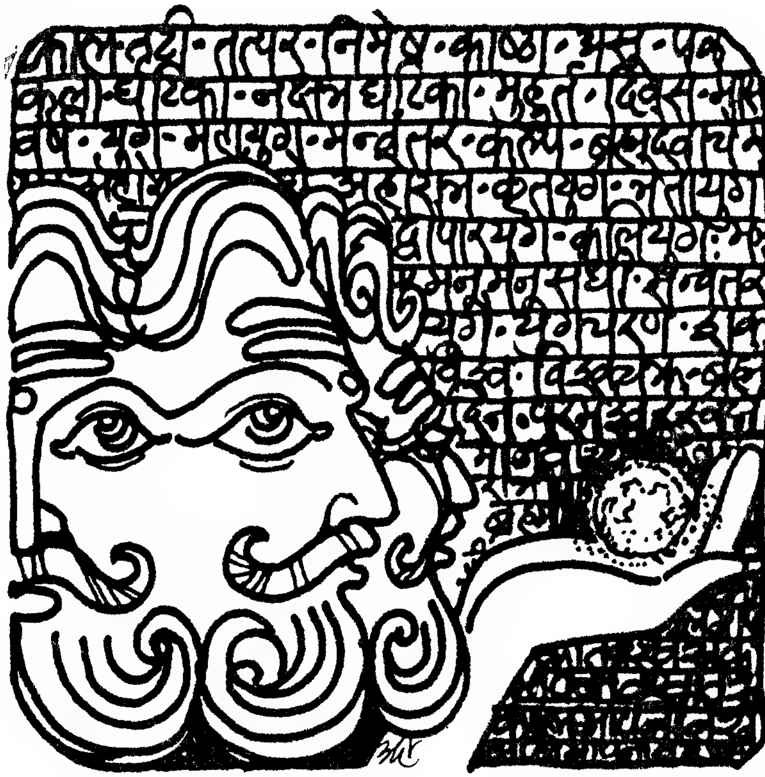
३० दिवसांचे १२ चांद्रमास झाले की ३६० तिथींचे एक चांद्रवर्ष संपते. चांद्रवर्ष सौरवर्षापेक्षा सुमारे ११ दिवसांनी लहान आहे. सर्वच धार्मिक व्यवहार चांद्रामासांमधील तिथींना अनुसरून असतात तरीही ते निरनिराळ्या ऋतूत असावेत अशी काळजी घ्यावी लागते. ऋतूमान तर पूर्णपणे सूर्यावर अवलंबून आहे. अर्थातच चांद्रवर्षाची ऋतूबरोबर संलग्नता ठेवायची असेल तर त्याची सौरवर्षाबरोबर सांगड घालणे आवश्यक आहे. सौर वर्ष व चांद्रवर्ष यांच्यामधील फरकाला अधिमास शेष असे नाव देतात आणि हा शेष म्हणजेच फरक २९.५३ दिवसांएवढा जमला की त्यावर्षीचे चांद्रवर्ष १३ चांद्रमासांचे मानण्यात येते. त्यासाठी जो महिना चांद्रवर्षात मिळवावा लागते त्याला अधिकमास असे म्हणतात नेहमीच्या क्रमाने येणाऱ्या पुढील महिन्याचेच नाव त्या महिन्याला बहाल करण्यात येते. ह्या प्रकाराला इंग्रजीत 'इंटरकॅलेशन' असे नाव आहे. साधारण ३२.५ मध्यम सौर महिन्यानंतर एक अधिकमास येतो.

भास्कराचार्यांनी तिथी, क्षयदिन, अधिकमास यांचेसाठी एक कोष्टक दिले आहे, ते असे.

कलियुग	=	४३२००० मध्यम सौर वर्ष, त्यामध्ये
नाक्षत्र सौर मास	=	५,१८४,०००
चांद्रमास	=	५,३४३,३३०
अधिक मास	=	१५९,३३०
मध्यम सौर दिन	=	१,५७७,९१६,४५०
तिथी	=	१६०,२९९,९००
क्षयदिन	=	२,५०८,२५५

* * *

१६



भास्कराचार्यप्रणित कालमापन

काल म्हणजेच जीवन! ज्या वस्तूजवळ काल नाही ती मृतच समजली पाहिजे. आपले जीवन कालाच्या स्वरूपात जसे वाढत असते तसे ते क्षणाक्षणाला कमीही होत

असते. 'घंटा जाती पळेही, जाती तास वाजे झणाणा, आयुष्याचा नाश होतो राम कारे म्हणाना!' ह्या काव्यापंक्ती यथार्थच आहेत. विज्ञानयुगात कालाचे महत्व पराकोटीला पोहोचले आहे. प्रत्येक क्षणाला आता सुवर्णाची किंमत प्राप्त झाली आहे. चंद्रावर किंवा मंगळावर जाणाऱ्या अवकाशयानाचे अचुक वेळापत्रक ठरवावे लागते. काही महत्वाच्या वैज्ञानिक प्रक्रियांसाठी विशिष्ट कालच लागतो. अनके मूलकण क्षणार्धात ऱ्हास पावतात. परदेशात किंवा स्वदेशात संचार करणारी विमाने, रेल्वे आणि बसेस् ह्याच्या जाण्यायेण्याचे अचुक वेळापत्रक ठरवावे लागते. विद्यालय, महाविद्यालयांच्या वेळा आणि तासिका ठराविक कालाच्याच असतात. एखाद्या मुंबैकराची नऊ सत्ताविसची गाडी चुकली की त्याला अर्ध्या दिवसाच्या पगाराचा भुर्दंड बसतो. आपले सारे जीवन काळाने पूर्ण जखडून टाकले आहे. एका प्रचंड कालचक्राच्या जाळ्यात आपण जणूकाही पार अडकलो आहोत, आणि कालरूपी एक अज्ञात कोळी आपल्यावर झडप घालण्यासाठी टपून बसला आहे. कालाचा महिमा अगाध आहे यात काही शंकाच नाही. त्याच्या आदी अंताचा आपल्याला पत्तासुध्दा लागत नाही.

प्राचीन भारतीय वैज्ञानिकांना कालाच्या या विलक्षण महात्म्याची सम्यक कल्पना आली असावी म्हणूनच त्या काळात कालमापनाची शक्यता नसतानाही त्यांनी सूक्ष्मातीसूक्ष्म आणि महाप्रचंड कालमापनाची व्यवस्था करून ठेवली. भास्कराचार्यांनी गणिताध्याय नावाच्या आपल्या ग्रंथात कालमापनाचे एक कोष्टक दिले आहे. त्यामध्ये सुमारे एक लक्षांश सेकंद हे जसे सूक्ष्म परिमाण आहे तसेच ब्रम्हदेवाचा एक दिवस हे कालमापनाचे प्रचंड परिमाण आहे. अत्यंत कमी व जास्त कालाच्या परिमाणांच्या या मर्यादा पाहिल्या की प्राचीन भारतीयांच्या प्रतिभेचे कौतुक करावेसे वाटते. अर्थात् कालमापनाची ही परिमाणे भास्कराचार्यांच्या पूर्वीही कित्येक शतके प्रचारात होती.

तास, मिनिट, सेकंद या आधुनिक परिभाषेत भास्कराचार्यांच्या कालमापनाची परिमाणे आपल्याला पहायची आहेत. त्यामुळे प्रत्येक परिमाणाचे या आधुनिक कालमापनामध्ये आपण रूपांतर करणार आहोत.

भास्करीय कालमापन : पहिले कोष्टक

भास्करीय परिमाण	आधुनिक परिभाषेतील किंमत
३० मुहूर्त = १ दिवस	१ मुहूर्त = २४/३० तास = ४८ मिनिटे
२ नाक्षत्र घटिका = १ मुहूर्त	१ नाक्षत्र घटिका = १/२ मुहूर्त = २४ मिनिटे
३० कला = १ नाक्षत्र घटिका	१ कला= १/३० नाक्षत्र घटिका=४८ सेकंद
३० काष्ठा = १ कला	१ काष्ठा = १/३० कला = ८/५ सेकंद
१८ निमेष = १ काष्ठा	१ निमेष = १/१८ काष्ठा = ४/४५ सेकंद
३० तत्पर = १ निमेष	१ तत्पर = १/३० निमेष = २/६७५ सेकंद
१०० तृटी = १ तत्पर	१ तृटी = १/१०० तत्पर = २/६७५०० सेकंद

भास्करीय कालमापन : दुसरे कोष्टक

१२ महिने = १ वर्ष	१ महिना = १/१२ वर्ष
३० दिवस = १ महिना	१ दिवस = १/३६० वर्ष = २४ तास
६० घटिका = १ दिवस	१ घटिका = २४/६० तास = २४ मिनिटे
६० पले = १ घटिका	१ पळ = २४/६० मिनिटे = २४ सेकंद
६ असू = १ पळ	१ असू = २४/६ सेकंद = ४ सेकंद
१० गुरु अक्षरे उच्चरायला लागणारा वेळ= १ असू	१ गुरु अक्षर उच्चारायला लागणारा वेळ = ४/१० सेंकंद

ही झाली सूक्ष्मातिसूक्ष्मापर्यंत कालमापन करण्याची परिमाणे. त्यापैकी तृटी हे परिमाण जवळ-जवळ तीन लक्षांश सेकंदाच्या आसपास आहे. सेकंदाचा इतका लहान हिस्सा मोजण्याची कोणीतीही अचुक साधने त्याकाळात उपलब्ध नव्हती हे सांगायला नकोच.

प्रचंड कालाच्या मापनासाठी आपल्या पूर्वजांनी तसेच भास्कराचार्यांनी वर्ष हे सर्वात लहान परिमाण निवडले आहे. त्यानंतर युग, महायुग, मन्वंतर, कल्प आणि ब्रह्मदेवाचे अहोरात्र, अशी एकापेक्षा एक मोठी परिमाणे आहेत. कलियुगातील वर्षांची संख्या सर्वात लहान म्हणजे ४३२००० वर्षे आहे. द्वापारयुग कलीच्या दुप्पट, त्रेतायुग तिप्पट आणि कृतयुग कलियुगाच्या चौपट मोठे गृहीत धरण्यात आले आहे. ह्या शिवाय प्रत्येक युगाच्या प्रारंभी व अंती त्या त्या युगातील वर्षांच्या एक बारांश एवढी वर्षे युग संधी असतात. अशी ही युगांची कल्पना आहे. मानवाची

३६० वर्षे म्हणजे देवांचे एक वर्ष असेही एक परिमाण आहे. वरील सर्व युगांमधील व संधींमधील वर्षांची बेरीज केली की एका महायुगातील वर्षे मिळतात. कोष्टकाच्या स्वरूपात ही युग संकल्पना पुढीलप्रमाणे दर्शविता येईल.

युगे	देववर्षे	सौर वर्षे
कृतयुग उषा	४००	१४४,०००
कृतयुग	४०००	१,४४०,०००
कृतयुग संधी	४००	१४४,०००
कृतयुगाची एकूण काल	४८००	१,७२८,०००
त्रेतायुग उषा	३००	१०८,०००
त्रेतायुग	३०००	१,०८०,०००
त्रेतायुग संधी	३००	१०८,०००
त्रेतायुगाचा एकूण काल	३६००	१,२९६,०००
द्वापारयुग उषा	२००	७२,०००
द्वापार युग	२०००	७२०,०००
द्वापारयुग संधी	२००	७२,०००
द्वापारयुगाची एकूण काल	२४००	८६४,०००
कलियुग उषा	१००	३६,०००
कलियुग	१०००	३६०,०००
कलियुग संधी	१००	३६,०००
कलियुगाचा एकूण काल	१२००	४३२,०००
महायुगाचा एकूण काल	१२०००	४,३२०,०००

महायुगानंतरचे मोठे परिमाण आहे मनू. एका मनुमध्ये ७१ महायुगे असतात आणि असे १४ मनू झाले म्हणजे ब्रह्मदेवाचा एक दिवस होतो, तेवढीच त्याची रात्र

असते. ब्रह्मदेवाचा एक दिवस म्हणजेच कल्प. एका कल्पात १००० युगे होतात. कारण १४ मनूंच्या आरंभी, मध्ये व अंती कृतवर्षतुल्य संधी असतात. ह्या प्रचंड काल कल्पनांचे कोष्टक पुढीलप्रमाणे लिहिता येईल.

	देववर्षे	सौरवर्षे
प्रारंभ ची उषा	४,८००	१,७२८,०००
७१ महायुगे	८५२,०००	३०६,७२०,०००
संधी	४,८००	१,७२८,०००
एक मनूचा काळ	८५६,८००	३०८,४४८,०००
चौदा मनूंचा एकूण काळ	११,९९५,२००	४,३१८,२७२,०००
कल्पाचा एकूण काळ	१२,०००,०००	४,३२०,०००,०००

४,३२०,०००,००० म्हणजे कल्पाचा एकूण काळ १००० महायुगांचा होत असल्यामुळे ब्रह्मदेवाच्या एका अहोरात्रात २००० महायुगे होतात. एका वर्षात ३६० ब्रह्म दिवस असतात, असे मानले तर ब्रह्मदेवाचे एक वर्ष पूर्ण होण्यास ३६० X २००० = ७२०,००० इतकी महायुगे पाहिजेत. ब्रह्मदेवाचे एकूण आयुष्य १०० वर्षे आहे असे गृहीत धरले तर त्याच्या आयुष्यात ७२,०००,००० इतकी महायुगे होतील. या कालास महाकल्प असे नाव पूर्वाचार्यांनी दिले आहे. काल अनादी असल्यामुळे आजपर्यंत नेमके किती ब्रह्मदेव होऊन गेले सांगता येत नाही. एका ब्रह्मदेवाची १०० वर्षे म्हणजे ७२,०००,००० X ४,३२०,००० = ३११,०४०,०००,०००,००० वर्षे होतात. हा काल महाप्रचंड आहे यात काही शंकाच नाही.

ग्रहगणित करण्यासाठी हा काल आवाक्याबाहेरचा आहे. ब्रह्माच्या दिवसाचा प्रारंभ झाला की ग्रहांची उत्पत्ती होते आणि ब्रह्मदेवाचा दिवस संपला म्हणजे ग्रहांचा लय होतो असे भास्कराचार्य मानतात. ब्रह्मदिनाच्या प्रारंभापासून शालिवाहन शकाच्या प्रारंभापर्यंत एकदर ६ मनू, कृतवर्षतुल्य ७ संधी, २७ युगे, कृत, त्रेता, द्वापार ही युगचरणे आणि कलियुगाच्या प्रारंभापासून ३१७९ वर्षे इतका काल उलटला असे भास्कराचार्यांनी मानले आहे. हा काळ किती येतो पहा.

६ मनू	=	१,८४०, ३२०,००० वर्षे
७ मनूसंधी	=	१२,०९६,००० वर्षे
२७ युगे	=	११६,६४०,००० वर्षे
३ युगचरणे	=	३,८८८,००० वर्षे
कलीप्रारंभापासून वर्षे	=	३१७९ वर्षे
एकूण काळ		१,९७२,९४७,१७९ वर्षे

या वर्षांमध्ये शालिवाहन शकाची गतवर्षे मिळविली की चालू शकापर्यंत ब्रह्मदिनातील गतवर्षे येतात.

गत सहा मनूंची नावेही भास्कराचार्यांनी दिली आहेत. पहिल्या मनूचे नाव स्वायंभुव, दुसरा स्वारोचिष, तिसरा उत्तमज, चौथा तामस, पाचवा रैवत, सहावा चाक्षुष याप्रमाणे सहा मनू होऊन गेले. सध्या सातवा मनू वैवस्वत चालू आहे.

१९९३ हे साल भास्कराचार्यांच्या आठशेव्या पुण्यतिथीचे वर्ष आहे. इसवी सन १९९३ साली १९१५ हा शालिवाहन शक आहे. वरील गणिताप्रमाणे ब्रह्मदिनाच्या प्रारंभापासून चैत्रशुद्ध प्रतिपदा शालिवाहन शके १९१५ पर्यंत १,९७२,९४७,१७९ + १९१५ = १,९७२,९४९,०९४ एवढी वर्षे उलटली आहेत.

भारतीयांचे कालमापन आणि त्यांची विश्वसंकल्पना या संबंधी कार्ल सॅगन या विख्यात खगोलशास्त्रज्ञाने त्यांच्या कॉसमॉस या पुस्तकात प्रशंसोद्गार काढले आहेत. त्यांच्या त्या सुप्रसिद्ध पुस्तकातील उताऱ्याचे शब्दशः भाषांतर असे.

'विश्व स्वतःच अगणीत नव्हे तर अनंत वेळा जन्म आणि मृत्यू यांच्या चक्रातून जाते, ह्या संकल्पनेवर ज्यांचा असीम विश्वास आहे, असा या जगातील सर्व महान् धर्मश्रद्धांमध्ये हिंदूधर्म हा एकमेव धर्म आहे. ह्या एकाच धर्मातील कालमापनाचे परिमाण आधुनिक विश्वशास्त्राच्या परिमाणाशी मिळते जुळते आहे. निश्चितच हा योगायोग असला पाहिजे. त्यांचे चक्र मानवाच्या दिवसरात्रीच्या सामान्य चक्रापासून ब्रह्मच्या दिवसरात्रीच्या चक्रापर्यंत विस्तारले आहे, ज्याचा काळ ८.६४ अब्ज वर्षांचा आहे. पृथ्वी आणि सूर्य यांच्या वयोमानापेक्षाही हा काळ मोठा आहे.

'विश्व हे परेश्वराचे स्वप्न आहे, या संकल्पनेत एक आव्हान आहे. ब्रह्माची १०'० वर्षे पूर्ण झाली की तो स्वतःला स्वप्नविहीन निद्रेत जणूकाही विरघळून टाकतो

आणि त्याचे बरोबर विश्वही विरघळून जाते. ब्रह्माची आणखी १०० वर्षे उलटली की तो पुन्हा जागृत होतो, स्वतःला सावरतो आणि पुन्हा एकदा विश्वाचे महान स्वप्न पाहू लागतो. मध्यंतरीच्या काळात दूर कुठे तरी अनंत विश्वे अस्तित्वात असतात. त्या प्रत्येकाचे स्वप्न पाहणारा स्वतंत्र ब्रह्मा असतो. अशा या उत्तुंग कल्पनांमधून त्याहीपेक्षा उदात्त कल्पना साकार होतात. असं सांगितलं जातं की मानव हा परमेश्वराचं स्वप्न नसू शकेल, पण परमेश्वर हेच मानवाचं स्वप्न असेल.'

'हिंदुस्तानात कित्येक देव आहेत. त्या प्रत्येकाचे अनेक अविष्कार आहेत. चोल प्रातांत अकराव्या शतकात घडविलेले ब्रॉन्झचे अनेक शिवपुतळे सापडतात. त्यात शिवाचे अनेक अविष्कार दर्शविले आहेत. त्यामध्ये विश्वचक्राच्या प्रारंभी झालेल्या विश्वनिर्मितीचा अत्यंत उत्कृष्ट व उदात्त आविष्कार आहे. शिवाचे विश्वनृत्य असे त्याचे नाव आहे. ह्या स्वरूपातील शिवाला नटराज असे नामाभिधान देण्यात येते. तांडव नृत्य करणाऱ्या शिवाला ४ हात आहेत. त्यातील वरच्या बाजूला असलेल्या उजव्या हातात एक डमरू आहे, त्याचा आवाज हा विश्वनिर्मितीचा ध्वनी दर्शवितो. शिवाच्या डाव्या हातात एक अग्नीशलाका आहे. अर्भकावस्थेत असलेल्या ह्या विश्वाचा काही अब्ज वर्षानंतर संपूर्णतः विनाश होईल, याचीच जणू काही ती अग्नीशलाका आठवण करून देते.'

***

१७



भुवनकोश

भास्कराचार्यांच्या सिद्धांतशिरोमणीचा गोलाध्याय हा खगोलशास्त्रीयदृष्ट्या अत्यंत महत्वाचा भाग आहे. त्यामध्ये गोलप्रशंसाध्याय आणि गोलस्वरूपप्रश्नाध्याय असे पहिले दोन अध्याय आहेत. तिसऱ्या अध्यायाचे नाव आहे भुवनकोश. भुवनकोश म्हणजे पृथ्वीचे वर्णन. पहिल्या दोन अध्यायात गोलाचे ज्ञान असण्याची आवश्यकता आणि विश्वाच्या गोलस्वरूपामधून निर्माण होणारे खगोलशास्त्रीय प्रश्न भास्कराचार्यांनी उपस्थित केले आहेत. खगोलशास्त्राचे परिपूर्ण ज्ञान व्हावे असे वाटत असेल तर हातातील आवळ्याप्रमाणे गोलाचे ज्ञान आवश्यक आहे असे भास्कराचार्यांचे प्रतिपादन आहे.

पृथ्वीची स्थिती कशी आहे? पृथ्वीला कुणी धारण केले आहे का? की ती अधांतरी आहे? पृथ्वीचा आकार केवढा आहे? उपद्वीप, महाद्वीप आणि पर्वत समुदायांनी घेरलेली पृथ्वी कशी दिसते? असे पृथ्वी संबंधातील अनेक प्रश्न भास्कराचार्यांनी गोलस्वरूपप्रश्नाध्यायात उपस्थित केले आहेत. याशिवाय त्या अध्यायात खगोलशास्त्रासंबंधीही काही प्रश्न त्यांनी मांडले आहेत. पृथ्वीसंबंधी उपस्थित केलेल्या प्रश्नांची उत्तरे त्यांनी भुवनकोश या तिसऱ्या अध्यायात दिली आहेत. भुवनकोशात काही तत्वज्ञानात्मक व अशास्त्रीय भाग आहे तो सोडून बाराव्या शतकातील भास्कराचार्यांना पृथ्वीची शास्त्रीय माहिती कितपत होती याचा शोध घेणे उद्बोधक ठरेल यात शंकाच नाही.

पृथ्वी कशाचाही आधार न घेता आपल्या शक्तीने आकाशात अधांतरीच आहे, असे भास्कराचार्य प्रथमच सांगून टाकतात. मात्र भास्कराचार्यांची पृथ्वी आकाशात स्थिर असून ग्रह नक्षत्रांसकट सारा खगोल तिच्याभोवती प्रदक्षिणा घालतो. पृथ्वी केंद्र खगोलाची ही मध्यवर्ती कल्पना आहे. पंधराव्या शतकात होऊन गेलेल्या कोपर्निकसपर्यंत या कल्पनेत बदल झालेला नव्हता. पृथ्वीच्या चारही बाजूंना मानव, दानव, वने, उपवने, गावे आणि नगरे वसली आहेत असे सांगून भास्कराचार्य लिहितात की कदंबवृक्षाच्या फुलाला ज्याप्रमाणे चहूबांजूनी केसर असतात तद्वत पृथ्वीवर चहूबाजूंनी वर आणि खाली पर्वत विराजमान आहेत. पृथ्वीच्या चारही बाजूंना मानवाची वस्ती असली पाहिजे याची जाण भास्कराचार्यांना होती हे यावरून सिद्ध होते.

आकाशातील इतर ग्रहांप्रमाणे पृथ्वीही आपल्या अक्षावर आकाशात अधांतरी आहे. जर पृथ्वीला धारण करणारी किंवा आधार देणारी काहीतरी वस्तू आहे असे मानले तर त्या वस्तूला आधार देणारी आणखी एक वस्तू आहे असे मानावे लागेल. ही कारण परंपरा कधीच न संपणारी असल्यामुळे अनवस्था प्रसंग ओढवेल. म्हणूनच पृथ्वीला आकाशाच्या पोकळीत कशाचाही आधार नाही ती अधांतरी आहे. असा भास्कराचार्यांचा बिनतोड युक्तिवाद आहे. पृथ्वीला गुरूत्वाकर्षण शक्ती असून ती आकाशातील पदार्थांना आपल्याकडे खेचते. पृथ्वीला मिळालेली ही ईश्वरदत्त देणगी आहे आणि ती कधीच नष्ट होणार नाही, असे भास्कराचार्यांचे मत आहे. लक्षात ठेवा, हे विधान न्यूटनच्या आधी किमान ५०० वर्षांपूर्वीचे आहे. गुरूत्वाकर्षणाला त्यांनी आकृष्टशक्ती असेही नाव दिले आहे. दुर्दैवाने भास्कराचार्यांना गुरूत्वाकर्षणाच्या बलाचा नियम शोधून काढता आला नाही.

पृथ्वी आकाशात अधांतरी आहे, ह्या आपल्या विधानाच्या पुष्टीसाठी भास्कराचार्य आणखी एक स्पष्टीकरण देतात. पृथ्वीच्याभोवती भ्रमण करणारे नक्षत्रचक्र आपण दररोज पहातो. कोणतेही नक्षत्र एकदा उगवल्यानंतर ६० घटकांनी म्हणजेच २४ तासानंतर पुन्हा उगवते. पृथ्वीच्याखाली तिला धारण करणारी एखादी वस्तू असेल तर ती ह्या नक्षत्रचक्राच्या भ्रमणाला अडथळा आणील, पण तसे होताना दिसत नाही, म्हणूनच पृथ्वी आकाशात आधारहीन असली पाहिजे हे निर्विवाद सिद्ध होते. भास्कराचार्यांचा हा युक्तिवाद अत्यंत अचुक आहे याबद्दल दुमत असण्याचे

कारण नाही.

पृथ्वी आकाशात खाली खाली जात आहे, असे काही बौद्ध ग्रंथात लिहिले आहे. अशी शंका व्यक्त करण्याचे काही कारण नाही, असे भास्कराचार्य म्हणतात आणि ती कशी निराधार आहे हे स्पष्ट करण्यासाठी ते पुढीलप्रमाणे युक्तिवाद करतात. 'आकाशतील कोणतीही वस्तू पृथ्वीवर पडते असे आपण पहातो. याचे कारण पृथ्वी त्या वस्तूला आपल्याकडे आकर्षुन घेते. समजा पृथ्वी स्वतःच प्रचंड वेगाने आकाशात खाली खाली जात असेल तर तिच्या तुलनेत प्रचंड वेगाने पृथ्वीकडे आकर्षित झालेली वस्तु पृथ्वीवर कधीच पडणार नाही, पण तसे होत नाही आकाशातील वस्तू पृथ्वीवर पडते असे आपल्याला स्पष्ट दिसते. त्यामुळे पृथ्वी आकाशात खाली खाली जात आहे ह्या विधानात काही तथ्य नाही. पृथ्वी आकाशात खाली जात असती तर एका सुर्योदयानंतर ६० घटकांनी दुसरा सूर्योदय होणे अशक्य होईल, अशीही पुस्ती त्यांनी जोडली आहे. तसेच पृथ्वी आकाशात खाली जात असती तर पृथ्वीचे सूर्यापासून असलेले अंतर सतत वाढत गेले असते आणि सूर्योदय कधीच झाला नसता. पृथ्वीवर सतत रात्रीसारखी परिस्थिति निर्माण झाली असती.

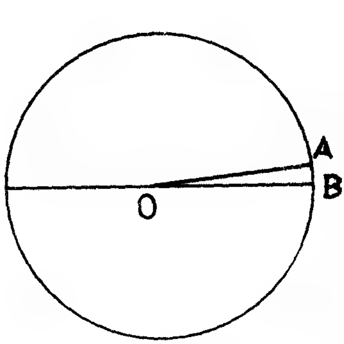
काही जैन ग्रंथात अशी कल्पना केली आहे की आकाशात दोन सूर्य, दोन चंद्र आणि नक्षत्रांच्या २७ जोड्या आहेत. भास्कराचार्यांनी ही कल्पनाही खोडून काढली आहे. ज्यावेळी सूर्य भरणीनक्षत्रात असतो त्यावेळी ध्रुवमत्स्य ताऱ्याचे मुख आणि शेपूट यांच्या प्रत्यक्ष दर्शनाने दोन चंद्र, दोन सूर्य वगैर कल्पना नाहिशा होतात. स्पष्ट सूर्याचे भोग १३ पासून २६ अंशापर्यंत असताना तो भरणी नक्षत्रात असतो. हा काळ २६ एप्रिल ते ९ मार्च असा आहे. ह्या काळात सूर्यास्ताच्यावेळी ध्रूवमत्स्याकडे पाहिले तर मुखाकडील तारे पश्चिमेच्या बाजूला तर पुच्छाकडील तारे पूर्वदिशेकडे दिसतात. या उलट सूर्योदयाचे वेळी मुखाकडील तारे पूर्वेकडे व पुच्छाचे तारे पश्चिमेकडे अशी स्थिती असते. म्हणजेच रात्रीच्या काळात ध्रूवमत्स फिरतो आणि रात्र समाप्त होत असताना त्याच्या मुखाकडील तारे पूर्वेकडे व पुच्छाकडील तारे पश्चिमेकडे जातात म्हणून एकाच सूर्याचा उदय मुखाकडील ताऱ्याच्या बाजूने होतो.

काही पुराणांमध्ये पृथ्वी सपाट आहे, असे वर्णन करण्यात आले आहे. आचार्यांनी याही अशास्त्रीय कल्पनेचा समाचार घेतला आहे. पृथ्वी सपाट असती

तर सूर्य सदोदित आकाशात दिसत राहिला असता. पृथ्वीवर कधीच रात्र पडली नसती. पृथ्वी गोलाकार आहे म्हणूनच पूर्व क्षितिजापासून पश्चिम क्षितिजापर्यंत प्रदेशात सूर्यदर्शन होते आणि पृथ्वीगोलाच्या खालील अर्ध्याभागात रात्र असते. हा क्रम निरंतर चालू आहे. उत्तरेला असलेल्या मेरू पर्वताच्या पायथ्याला सूर्योदय होतो, असेही काही पुराणात प्रतिपादन आहे. त्यावर आचार्य म्हणतात, पण काही काळ तो पूर्व दिशेच्या दक्षिणेलाही उगवताना दिसतो. अर्थातच उत्तरेला असणाऱ्या मेरू पर्वताच्या पायथ्याला नेहमी सूर्योदय होते, या विधानात काही तथ्य नाही. केवळ २१ मार्च व २३ सप्टेंबर या दोनच दिवशी सूर्य बरोबर पूर्वेला उगवतो. २१ मार्च नंतर सूर्योदयाचे स्थान उत्तरेकडे सरकू लागते. २२ जून रोजी सूर्य पूर्व दिशेच्या संदर्भात अत्याधिक उत्तरेकडे उगवतो. या उलट २३ सप्टेंबर नंतर सूर्योदयाचे स्थान दक्षिणेकडे सरकत जाते व २२ डिसेंबर रोजी तो पूर्व दिशेच्या संदर्भात अत्याधिक दक्षिणेकडे उगवतो. सूर्योदयाच्या ह्या बदलत्या स्थानाची भास्कराचार्यांना सुयोग्य कल्पना होती, हे सांगायला नकोच.

पृथ्वी सपाट का भासते याचे भास्कराचार्यांनी फार मार्मिक विवेचन केले आहे. पृथ्वीवर आपण ज्या ठिकाणी उभे असतो, तेथून आपली दृष्टी एका विक्षित अंतरापर्यंत पोहोचते. ह्या विशिष्ट अंतराने मर्यादित झालेले भूमीचे क्षेत्रफळ पृथ्वीच्या एकंदर क्षेत्रफळाच्या अत्यंत अल्प आहे. त्यामुळेच आपल्या सभोवारचा प्रदेश आपल्याला सपाट भासतो. समजा एखाद्या मोठ्या गोलावर एखादी मुंगी फिरत असेल तर तिला तिच्या आजूबाजूचा प्रदेश सपाट भासेल. पृथ्वीच्या तुलनेत मानवाची त्या मुंगीसारखीच अवस्था आहे. याही पुढे जाऊन आपल्या मताच्या प्रतिपादनासाठी भास्कराचार्यांनी भूमितीचा आधार घेतला आहे.

समजा वर्तुळाचे ९६ समान भाग केले तर प्रत्येक भाग ३६० × ६०/९६ = २२५ कोनीय मिनिटांचा होईल. आकृतीमधील AOB हा कोन 225 कोनीय मिनिटांचा असेल तर AB हा चाप व AB ही ज्या यांचेमध्ये फारसा फरक दिसणार नाही. त्यामुळेच वर्तुळाचा AB हा भाग सरळ आहे असे वाटेल. वर्तुळाऐवजी गोल घेतला तर AB ह्या भागचे क्षेत्रफळ गोलाच्या तुलनेत लहान असल्यामुळे तो भाग चाप आणि ज्या मिळत्या जुळत्या होतील. पृथ्वी सपाट का दिसते याचे भास्कराचार्यकृत विश्लेषण त्यांच्या तीव्र बुद्धिमत्तेचे द्योतक आहे, हे सांगण्याची



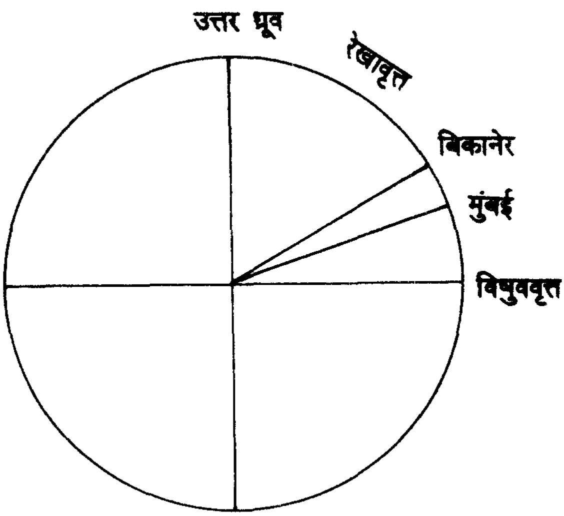
आवश्यकता नाही.

विषुवृत्ताला भास्कराचार्य भूमध्यरेखा असे नाव देतात. उत्तर व दक्षिण ध्रूवांपासून ही रेखा ९० अंशावर आहे, व तिच्या उत्तरेला व दक्षिणेला असलेले प्रदेश अक्षांशीय आहेत. ज्या ठिकाणी अक्षांश शून्य असते त्याला भास्कराचार्यांनी नीरक्ष प्रदेश असे नाव दिले आहे. अर्थात भूमध्यरेखा किंवा विषुववृत्त हाच भास्कराचार्यांचा नीरक्ष प्रदेश आहे. दोन्ही ध्रूव निरीक्षकाचे खमध्य आणि भूमध्य रेषा यावरून जाणाऱ्या वृत्ताला त्यांनी स्वदेशीय याम्योत्तर वृत्त म्हटले आहे. इंग्रजीमध्ये या वृत्ताला 'मिरेडियन' असे नाव आहे.

पृथ्वीचा आकार केवढा असावा! हा प्रश्न सोडविण्याचे प्रयत्न फार पुरातन काळापासून चालू होते. इरॅटोस्थेनस् या प्राचीन ग्रीक खगोलशास्त्रज्ञाने इसवी सन पूर्व २५० व्या सुमाराला सूर्याच्या किरणांचा आधार घेऊन त्या प्रश्नाचे जवळ जवळ अचुक उत्तर शोधून काढले होते. पृथ्वीच्या आकाराचा अंदाज बांधण्याची भास्कराचार्यांची पद्धत फारच सोपी आहे. त्यासाठी दोन नगरांमधील प्रत्यक्ष अंतर आणि त्यांचे अक्षांश या दोन गोष्टींची आवश्यकता आहे, मात्र ही दोन नगरे एकाच रेखांशावरील असली पाहिजेत. कोणत्याही नगराचे अक्षांश प्रत्यक्ष वेधाने निश्चित करता येतात.

विषुववृत्तावर उत्तर आणि दक्षिण ध्रूव क्षितिजावर दिसतात. जसजसे उत्तरेकडे जावे तस तसे उत्तर ध्रूव क्षितिजापासून वर वर उचलेला दिसतो. प्रत्यक्ष उत्तर ध्रूवावर आकाशातील उत्तर ध्रूव बरोबर डोक्यावर दिसतो. उदाहरणार्थ, मुंबई हे शहर १९ उत्तर अक्षांशावर आहे, त्यामुळे मुंबईच्या आकाशात उत्तर ध्रूव तारा क्षितिजापासून १९ अंश वर उचलेला दिसतो. हा कोन अगदी साध्या उपकरणानेही मोजता येतो. त्याच पद्धतीने दोन शहरांमधील अक्षांशांतर निश्चित करता येते. समजा दोन शहरातील प्रत्यक्ष अंतर माहीत असेल तर पृथ्वीचा परीघ साध्या त्रैराशिकाने काढता येईल.

उदाहरण म्हणून मुंबई व बिकानेर ही दोन नगरे निवडू. प्रत्यक्षात ही दोन नगरे



एका रेखांशावर नाहीत. मुंबईचे रेखांश आहेत ७२ अंश ५० मिनिटे तर बिकानेरचे आहेत ७३ अंश १९ मिनिटे. त्यांच्यामधील रेखांशात साधारण ३० मिनिटांचा फरक आहे तो आपण दुर्लक्षित करणार आहोत. मुंबईचे उत्तर अक्षांश आहेत १९ तर बिकानेरच आहेत २८. अर्थात या दोन नगरांमधील अक्षांशांतर ९ अंश आहे. मुंबई व बिकानेर या दोन नगरांमध्ये सुमारे १००० किलोमीटर अंतर आहे. ९ अंशाबरोबर १००० किलोमीटर तर ३६० अंश म्हणजे किती किलोमीटर, या त्रैराशिकाप्रमाणे पृथ्वीचा परीघ पुढीलप्रमाणे मिळेल.

पृथ्वीचा परीघ $= \frac{३६०}{९} \times$ १००० किलोमीटर = ४०,००० किलोमीटर. पृथ्वीचा परीघ ठरविण्यासाठी हीच पद्धत भास्कराचार्यांनी वापरली आहे. भास्कराचार्यांच्या काळात अंतरे योजनांमध्ये मोजीत असत. एक योजन म्हणजे आधुनिक परिभाषेत नेमके किती अंतर याबद्दल बरेच दुमत आहे. भास्कराचार्यांनी पृथ्वीचा परीघ ४९६७ योजने मानला आहे.

आपल्या लीलावती या ग्रंथाच्या प्रारंभी भास्कराचार्यांनी अंतर मोजण्यासाठी पुढील परिमाणे दिली आहेत.

१ अंगुल	=	८ यवोदर
२४ अंगुल	=	१ हात
४ हात	=	१ दंड
२००० दंड	=	१ क्रोश
४ क्रोश	=	१ योजन

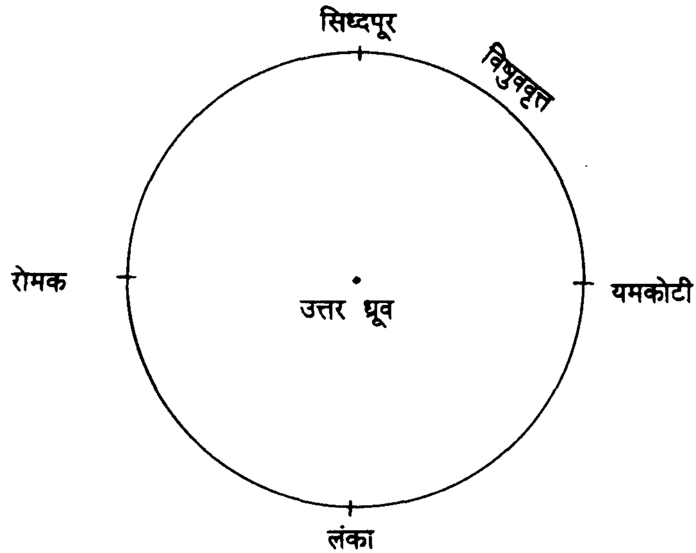
याचा अर्थ १ योजन म्हणजे ३२००० हात. आधुनिक परिभाषेत १ हात म्हणजे किती सेंटीमीटर? हाच मोठा प्रश्न आहे. हाताच्या घोट्यापासून बोटांच्या टोकापर्यंतचे अंतर म्हणजे एक हात असे मानले तर ही लांबी साधारण ४५ ते ५० सेंटीमीटर भरते आणि १ योजन सुमारे १६ किलोमीटर होतात, आणि भास्कराचार्यांच्या पृथ्वीचा परीघ ४९६७ × १६ = ७९४७२ किलोमीटर येतो. ही पृथ्वीच्या परीघाची किंमत जवळ जवळ दुप्पट आहे. भास्कराचार्यांच्या आधी सुमारे ४ शतके म्हणजे सातव्या शतकात ह्यू एन संग नावाचा चिनी यात्रेकरू भारताचा प्रवास करून गेला होता. त्याच्या लिखाणावरून आणि काही अन्य भारतीय ग्रंथांवरून १ योजन हे अंतर ८ किलोमीटरच्या आसपास असावे असे वाटते. हे परिमाण योग्य आहे असे मानले तर भास्कराचार्यांच्या पृथ्वीचा परीघ ४९६७ × ८ = ३९७३६ किलोमीटर येईल. पृथ्वीच्या परीघाची आधुनिक किंमत ४०२१२ किलोमीटर आहे.

भास्कराचार्यांनी पृथ्वीचा व्यास १५८१ $\frac{१}{२४}$ योजने मानला आहे. त्यावरून त्यांनी परीघ आणि व्यास या सुप्रसिद्ध गुणोत्तराची किंमत काय घेतली होती हे सहज पहाता येईल. परीघ आणि व्यास यांचे गुणोत्तर 'पाय' या ग्रीक अक्षराने दर्शविली जाते. पाय दशांश अपूर्णांची अब्जावधी दशांशपर्यंतची किमत संगणकाच्या साह्याने आता निश्चित करण्यात आली आहे. अर्थात खगोलशास्त्रीय गणितासाठी इतक्या अचुकतेची आवश्यकता नाही. भास्कराचार्यांच्या काळात दशांश अपूर्णांक लिहिण्याची पद्धत रूढ झालेली नव्हती, त्यामुळे त्यांनी पृथ्वीचा व्यास १५८१ १/२४ मानला आहे. दशांश पद्धतीनुसार ही किंमत १५८१.०४१६६ अशी येते. त्यामुळे भास्कराचार्यांनी मानलेली पायची किंमत पुढीलप्रमाणे मिळते.

भास्कराचार्य प्रणीत पाय = ४९६७/१५८१.०४१६६ = ३.१४१५९ पायची ही किंमत पाच दशांश स्थळापर्यंत अचुक आहे. अन्यत्र भास्कराचार्यांनी पायची किंमत ३.१४१६ मानली आहे.

शून्य रेखावृत्ताचे महत्व भारतीय आचार्यांनी फार पुरातन काळापासून माहीत होते. शून्य रेखावृत्तासाठी त्यांनी उज्जैन शहर निवडले होते. आधुनिक जगात हा मान ग्रीनविच् या लंडनच्या एका उपनगराला प्राप्त झाला आहे. जगातील सर्व घड्याळे आज ग्रीनविच येथील मध्यम कालाप्रमाणे लावण्यात येतात. ग्रीनविच येथील रात्रीचे १२ म्हणजे भारतीयांचे सकाळचे साडे पाच. याचप्रमाणे इतर देशाच्या

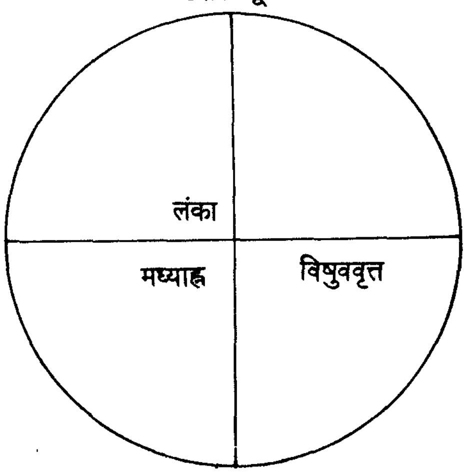
प्रमाणवेळा निश्चित करण्यात आल्या आहेत. भास्कराचार्यांनीही शून्य रेखावृत्त म्हणून उज्जैन नगराचीच निवड केली आहे. उज्जैनचे विषुववृत्तापासून अंतर पृथ्वीच्या परिघाच्या एक षोडशांश आहे, असे त्यांनी गृहीत धरले होते, त्याप्रमाणे उज्जैनचे



अक्षांश येतात, ३६०/१६ = २२ अंश ३० मिनिटे. आधुनिक पद्धतीप्रमाणे उज्जैन विषुववृत्ताच्या उत्तरेला २३ अंश ११ मिनिटांवर आहे. अर्थात भास्कराचार्यांनी मानलेले उज्जैनचे अक्षांश ४१ मिनिटांनी कमी आहेत. कदाचित सोईसाठी त्यांनी २२.५ अंश ही किंमत गृहित धरली असावी.

विषुववृत्तावर लंका नावाचे एक नगर आहे असे मानण्याची भारतीय खगोलशास्त्रज्ञांची प्रथा होती. अशा नावाचे कोणतेही नगर विषुववृत्तावर अस्तित्वात नाही. परंतू भारताच्या दक्षिणेला रावणाची लंका आहे, ह्याबद्दल त्यांच्यात दुमत नव्हते. लंकानगरीपासून पश्चिम दिशला ९० अंशावर रोमक नगर, पूर्व दिशेला ९० अंशावर यमकोटी नगर आणि १८० अंशावर सिद्धपूर नगर, अशा विषुववृत्तावरील

४ नगरांची भास्कराचार्यांनी कल्पना केली आहे. प्रत्यक्षात या नावाची नगरे त्या त्या ठिकाणी अस्तित्वात नाहीत. पण भास्कराचार्यांना रोमक म्हणजे रोम नावाचे नगर पश्चिमेला असल्याचे माहित असावे असे वाटते. लंकानगरीत मध्यान्ह असेल तर रोमक नगरात सूर्योदय आणि यमकोटीत सूर्यास्त तसेच सिद्धपूरमध्ये मध्यरात्र असली पाहिजे. हे भास्कराचार्यांचे विधान शास्त्रीय दृष्ट्या योग्य आहे.



पृथ्वीचा उत्तर ध्रुव म्हणजे भास्कराचार्यांचा मेरू. या ठिकाणी देवांची वस्ती आहे असे ते लिहितात. दक्षिण ध्रुवाला मात्र त्यांनी वडवानल नाव दिले आहे, आणि त्या ठिकाणी दैत्यांची वस्ती आहे असे ते मानतात. पृथ्वीवर ज्या ठिकाणी मनुष्य रहातो, तो आपल्यापासून १८० अंशावर असलेल्या नागरिकांना पाताळात रहाणारे, असे समजतो, भास्कराचार्यांचे हे विधान योग्य आहे, त्याप्रमाणे भारताच्या दृष्टीने अमेरिका हे पाताळ होईल आणि भास्कराचार्यांचे सिद्धपूर हे नगर अमेरिकेत असेल. भास्कराचार्यांच्या काळी अमेरिका माहित नव्हती हे सोडून द्या. तर, असा आहे

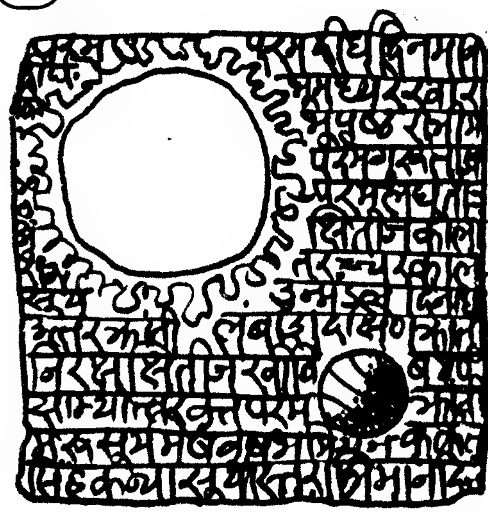
भास्कराचार्यांचा भुवनकोश.

पृथ्वीच्या भूपृष्ठावर किती उंचीपर्यंत वातावरण आहे याचा अंदाजही भास्कराचार्यांनी आपल्या ग्रंथात दिला आहे. त्यांनी पृथ्वीच्या वातावरणाचे एकंदर ७ भाग पाडले आहेत. जो वायू भूपृष्ठाच्या लगत आहे आणि जो पृथ्वीवर सर्व दिशांना वहातो अशा वायूला त्यांनी 'आवह' असे नाव दिले आहे. त्याच्यावर 'प्रवह' नावाचा वायूगोल त्यांनी कल्पिला आहे. त्यानंतर अनुक्रमाने उद्वह, संवह, सुवह, परिवह आणि परावह असे वायूगोल आहेत अशी भास्कराचार्यांनी कल्पना केली आहे. आधुनिक विज्ञानानेही पृथ्वीच्या वातावरणाचे अनेक भाग पाडले आहेत हे ह्या ठिकाणी लक्षात ठेवायला हरकत नाही. अर्थात आधुनिक विज्ञानाने तापमान हा आधार घेऊन तशी विभागणी केली आहे. भास्कराचार्यांच्या विभागणीला तसा आधार नाही. पण पृथ्वीच्या वातावरणाची विभागणी ही कल्पनाच अतिशय महत्वाची आहे.

भूपृष्ठावर १२ योजने म्हणजे सुमारे ९६ किलोमीटर पर्यंत वातावरण पसरलेले आहे असे भास्कराचार्य म्हणतात. या मर्यादेच्या आत सजल मेघ, विद्युल्लता, इंद्रधनुष्य वगैरे सृष्टीचमत्कार निर्माण होतात असेही भास्कराचार्य सांगून टाकतात. त्यांच्या या मताबद्दल मतभेद असण्याचे कारण नाही. वातावरणाची आधुनिक मर्यादा आणि भास्कराचार्यांनी गृहीत धरलेली मर्यादा यामध्ये फारसा फरक नाही. यानंतर भास्कराचार्य एक अत्यंत महत्वाचे विधान अध्यारतपणे करतात. ते लिहितात की पृथ्वीचे वातावरण संपले की त्यापुढे निर्वात प्रदेश लागतो व तो तहत चंद्रबिंबापर्यंत पसरलेला आहे. १२ व्या शतकात पृथ्वीच्या वातावरणापलिकडे निर्वात प्रदेश आहे असे विधान करणे भास्कराचार्यांच्या उच्च बुद्धीचे द्योतक आहे, यात शंकाच नाही.

***

१८



परम दिर्घ दिनमान

उन्हाळ्यामध्ये दिवस मोठा तर रात्र लहान असते असे आपण पहातो. आपल्याकडे हा फरक फारसा जाणवत नाही कारण आपण विषुववृत्तापासून बरेच जवळ आहोत. विषुववृत्तपासून पुष्कळ दूर असणाऱ्या इंग्लंड, जर्मनी, रशिया वगैरे देशात हा फरक फारच मोठा असतो. जस जसे उत्तरेकडे जावे तस तसा हा फरक अधिकाधिक वाढत जातो. भूपृष्ठावर अशी काही ठिकाणे आहेत की ज्या ठिकाणी दिनमान व रात्रिमान यामध्ये परम अधिकता किंवा परम लघुता असते. म्हणजेच त्या ठिकाणी सहा महिने दिवस आणि सहा महिने रात्र असते. असे कां होते याचे उत्तम विवरण भास्कराचार्यांनी गोलाध्यायाच्या त्रिप्रश्नवासना ह्या अध्यायात केले आहे.

उन्हाळ्याचीच परिस्थिती लक्षात घेतली तर असे आढळते की, आपण ज्या अक्षांशावर रहातो ते व नीरक्ष म्हणजेच विषुववृत्तावरील क्षितीज, या दोन ठिकाणी होणाऱ्या सूर्योदयात कालांतर असते. ह्या कालांतराला भारतीय ज्योतिषशास्त्रात चरकाल असे म्हणतात. इंग्रजीत त्यासाठी 'ॲसेन्शल डिफरन्स' असा शब्द आहे. उत्तर गोलार्धातील उन्हाळ्यात आपल्या क्षितिजावर सूर्योदय झाला की नंतर नीरक्ष क्षितिजावर म्हणजेच विषुववृत्तावर होतो. कारण उत्तर गोलार्धात उन्मंडल क्षितिजच्या वर असते. पूर्व, पश्चिम बिंदू आणि उत्तर दक्षिण ध्रूव या चार बिंदूमधून जाणारे काल्पनिक वर्तुळ म्हणजे उन्मंडल याची आपल्याला कल्पना आहेच.

६ तासांचा दिनार्ध मानला तर उन्हाळ्यामध्ये उत्तर गोलार्धात ६ तास अधिक चरकाल (तासात) एवढा दिनार्ध असतो, म्हणजेच या काळातील,

दिनमान = २ (६ तास + चरकाल) = १२ तास + २ चरकाल आणि रात्रिमान = २ (६ तास - चरकाल) = १२ तास - २ चरकाल.

याचाच अर्थ उन्हाळ्यात दिवस मोठा व रात्र लहान असते. भास्कराचार्य म्हणतात ज्या नगरांचे अक्षांश ६६ अंशापेक्षा अधिक असतात अशा ठिकाणी रात्रिमान व दिनमान यामध्ये अधिक विशेषता असते. उत्तर गोलार्धात ज्यावेळी सूर्याची उत्तर क्रांती लंबांशापेक्षा अधिक असेल त्या सर्व ठिकाणी सदोदित सूर्य दर्शन होत राहील. अशीच परिस्थिति दक्षिण गोलार्धात निर्माण होईल. त्यावेळी सूर्याची दक्षिण क्रांती लंबांशापेक्षा जास्त असेल. ९० अंशातून आपल्या स्थानचे अक्षांश वजा केले लंबांश मिळतात, उदाहरणार्थ ९० - १९ = ७१ अंश हे मुंबईचे लंबांश आहेत.

ज्या देशाचे अक्षांश ७० असतील तेथील लंबांश ९०-७० = २० अंश असतात. अशा देशात विषुववृत्तीय क्षितीज म्हणजे नीरक्षा क्षितीज दक्षिण क्षितीजावर २० अंश आणि उत्तर क्षितीजाखाली २० अंश असेल. ज्यावेळी सूर्याची क्रांती क्षितिजा खाली २० अंशाबरोबर असेल अशावेळी उत्तर क्षितिजाच्या बाजूने रवीबिंब उगवेल आणि याम्योत्तर वृत्तावर तो ४० अंश उंचीवर राहील. म्हणजेच त्यावेळी चरकाल ६ तासांचा होईल आणि दिनार्धाचे प्रमाण पुढीलप्रमाणे असेल

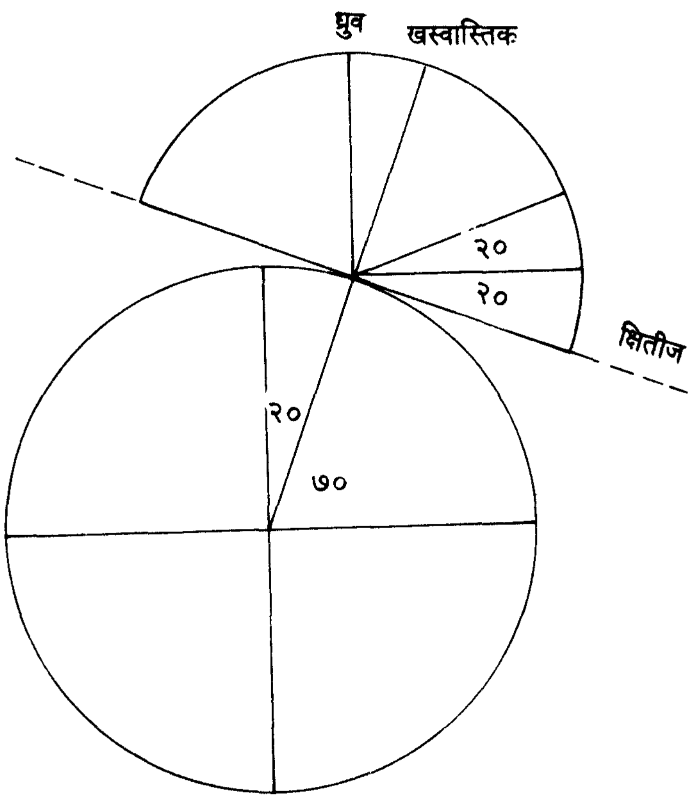
दिनार्ध = ६ तास + ६ तास चरकाल = १२ तास

दिनमान = १२ तास + १२ तास = २४ तास

रात्रिमान = ० तास

त्यानंतर सूर्याची क्रांती २३.५ अंशापर्यंत वाढत जाणार आहे. भास्कराचार्यांनी सूर्याची परम क्रांती २४ अंशाची मानली आहे. २२ जूनच्या दरम्यान सूर्य परम क्रांतीला पोहोचेल. आणि तो क्षितीजावर ३.५ अंशावर भ्रमण करील. त्यानंतर पुन्हा सूर्याची क्रांती कमी होत होत २० अंशापर्यंत पोहोचेल आणि या सर्व काळात ७० अक्षांशावर सूर्याचे सदोदित दर्शन होत राहील.

मेरूवर म्हणजे पृथ्वीच्या उत्तर ध्रूवावर अक्षांश ९० अंश असतात त्यामुळे उत्तर ध्रुवाचे लंबांश ९०-९० = ० शून्य असतील. ध्रुव बिंदू पासून ९० अंशावर ध्रूवाचे



क्षितीज असणार त्यामुळे सूर्य, मेष, वृषभ व मिथून राशीत असे पर्यंत मध्याह्नाचा काळ मानावा लागेल हा काळ ३ महिन्यांचा आहे व पुढे कर्क, सिंह व कन्या पार करीपर्यंत तीन महिन्यांचा काळ उलटेल आणि नंतर सूर्यास्त होईल अशा प्रकार ध्रुवावर ६ महिन्यांचा दिवस असेल व ६ महिन्यांची रात्र राहील.

भास्कराचार्यांचे हे विवरण अत्यंत शास्त्रशुद्ध आहे यात शंकाच नाही. जी गोष्ट भास्कराचार्यांनी आठ शतकांपूर्वी मांडली तीच जवळजवळ त्याच पद्धतीने स्मार्ट ह्याच्या 'स्फेरिकल ॲस्ट्रॉनॉमी' ह्या आधुनिक ग्रंथात लिहिली आहे. सदरहू पुस्तकातील मूळ इंग्रजी परिच्छेद त्याची उत्तम साक्ष होईल. १९७९च्या आवृत्तीत

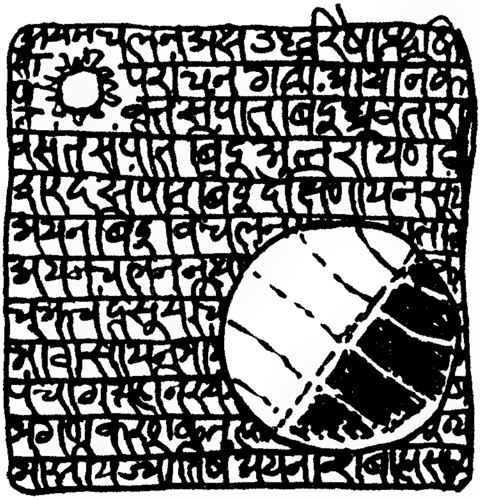
१५२ व्या पृष्ठावर या संबंधी जो परिच्छेद आहे तो असा.

If is seen that when Latitude = 66° 33' North and declination = + 23° 27', the hour angle of setting is 12 hours, that is to say, at ths Arctic Circle on June 21 the sun is above the horizon during the whole 24 hours.. In latitude 70°, for example, the sun is above the horizon continuously during the period for which the sun's declination is between + 20° and + 23° 27', that is to say, between May 22 and July 24. (according to 1931 almanac) At the north pole the sun is above the horizon continuously between March 21 and September 21 and below the horizon for remainder of the year.

भास्कराचार्यांच्या आणि स्मार्टच्या विवरणातील विलक्षण साम्य पाहून आपल्याला आश्चर्य वाटल्यावाचून रहात नाही.

***

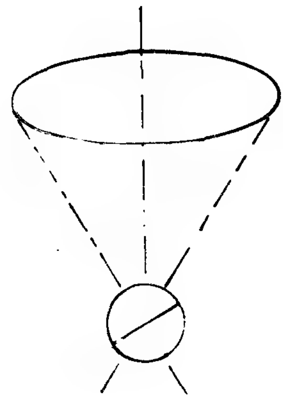
१९

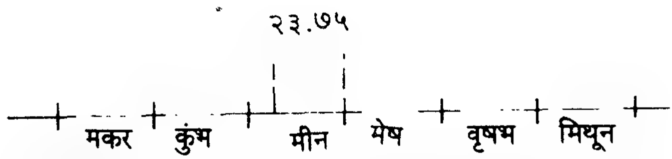


अयनचलन

एखाद्या भोवऱ्यासारखी पृथ्वी स्वतःभोवती आकाशात भ्रमण करीत असते. तिचा अक्ष काल्पनिक उध्वरिषेपासून सुमारे २३.५ अंशाने कललेला असून तो उध्वरिषेभोवती सुमारे २६००० वर्षात एक प्रदक्षिणा पूर्ण करतो. पृथ्वीच्या या वैशिष्ट्यपूर्ण गतीला परांचन गती असे नाव आहे. इंग्रजीत त्यासाठी 'प्रिसीशनल मोशन' असा शब्द आहे. पृथ्वीच्या परांचन गतीमुळे ध्रूवताऱ्याचे स्थान बदलत जाते. ज्याला आज आपण उत्तर ध्रूव तारा म्हणतो तो २००० वर्षांपूर्वी ध्रूवतारा नव्हता आणि आणखी २००० वर्षांनंतर असणार नाही. ध्रूवतारा बदलतो ह्याचाच अर्थ आयनिक वृत्ताच्या संदर्भात वैषुविक वृत्त बदलत जाते, आणि त्यामुळे संपातबिंदूची स्थानेही बदलतात. संपात बिंदू अगदी अत्यल्प गीतने पश्चिमेकडे सरकत असतो.. वसंतसंपात बिंदूच्या नंतर सूर्याचे उत्तरायण चालू होते आणि शरद संपातानंतर सूर्याच्या दक्षिणायनाला प्रारंभ होतो. त्यामुळे वसंत आणि शरद संपात बिंदूंना अयन बिंदू असेही म्हणतात आणि त्यांच्या विचलनाला अयनचलन असे म्हणण्याचा प्रघात आहे.

भारतीयांचे नक्षत्रचक्र मेष राशीच्या प्रारंभ बिंदूपासून चालू होते. भारतीयांच्या मेषराशीचा प्रारंभ बिंदू काधीकाळी वसंत संपाताबरोबर मिळताजुळता होता. परंतू





आज वसंत संपात बिंदू सरकत सरकत मीन राशीत जाऊन बसला आहे. भारतीय मेषराशीचा प्रारंभ बिंदू आणि वसंत संपात बिंदू यामधील कोनीय अंतराला अयनांश ह्या नावाने ओळखतात. आज १९९३ साली ह्या अयनांशाची किंमत सुमारे २३.७५ अंश झाली आहे. कालमानाप्रमाणे ही किंमत वाढतच जाणार आहे. सर्व खगोलीय गणिते वसंत संपात हाच प्रारंभ बिंदू मानून केलेली असतात. त्यावरून ग्रहांचे आणि चंद्र सूर्याचे जे भोग (लॉन्जिट्युड) मिळतात, त्यांना सायन भोग अशी संज्ञा आहे. भारतीय पंचांगासाठी मात्र भारतीय मेष राशीचा प्रारंभ हाच संदर्भ बिंदू गृहित धरून ग्रहांच्या स्थिति दिलेल्या असतात. त्यामुळे आपल्या पंचांगांना निरयन, म्हणजे अयन चलन लक्षात न घेता ग्रहांच्या स्थिती दिलेले पंचांग असे म्हणण्यात येते. परंतु सर्व भारतीय पंचांगांत काही दिवसांच्या अंतराने अयनांश दिलेले असतात. ते ग्रहाच्या निरयन भोगात मिळविले की ग्रहाचे सायन भोग काढता येतात.

आपल्यासमोर महत्वाचा प्रश्न असा आहे की, प्राचीन भारतीय आचार्यांना अयन चलनाची कितपत माहिती होती? आणि भास्कराचार्यांचे त्यासंबंधी काय मत होते.

१८९६ साली शंकर बालकृष्ण दिक्षित त्यांनी 'भारतीय ज्योतिष' या नावाचा एक अप्रतीम ग्रंथ लिहिला आहे. भारतीय ज्योतिषाचा सर्वांग परिपूर्ण विचार त्या ग्रंथात दिक्षितांनी केला आहे. त्या तोडीचा एकही ग्रंथ मराठीतच नव्हे तर हिंदुस्तानातील दुसऱ्या कुठल्याही भाषेत लिहिलेला नाही. लोकमान्य टिळकांनीही दिक्षितांच्या भारतीय ज्योतिष ग्रंथांची प्रशंसा केली होती. सर्व आधाराचा साकल्याने विचार करून दिक्षितांनी असे मत दिले आहे की इसवी सन ५०० च्या सुमारालाच भारतीयांना अयन चलनाची माहिती झाली होती.

वराह मिहिराने आपल्या पंचसिद्धांतिकेत अयनचलनाची मुळीच चर्चा केलेली नाही. सूर्य सिद्धांताने अयन बिंदू आंदोलनात्मक असतो असे म्हटले आहे. तो एकदा २७ अंशातून पश्चिमेकडे सरकून मूळ स्थानी येतो, असे त्या ग्रंथात प्रतिपादन आहे. साधारणपणे सर्व आचार्यांनी अयनचलनाची वार्षिक गती ५४ सेंकद ते ६० सेकंद यांचे दरम्यान गृहीत धरली आहे. आधुनिक गणितानुसार अयन चलनाची गती प्रतीवर्षाला सुमारे ५० सेकंद आहे. ब्रेनान्ड या इंग्रजाने १८९६ साली 'हिंदू ॲस्ट्रॉनॉमी' या नावाचा ग्रंथ लिहिला आहे. त्या ग्रंथात त्याने असे प्रतिपादन केले आहे की हिंदू आचार्यांना अयनचलनाची वार्षिक गती ५० सेकंद असते हे माहित होते, पण त्यांनी हे ज्ञान मुद्दाम गुप्त ठेवले आणि अयनगीत वर्षाला ५४ सेकंद असते असे मानले.

सिद्धांत शिरोमणी हा एकमेव ग्रंथ सोडला, तर भास्कराचार्यांच्या अगोदरच्या सर्व आचार्यांनी अयनचलनाचा संबंध नक्षत्र मंडलाशी जोडला आहे, तो बिंदू नक्षत्र मंडलात पूर्वेकडून पश्चिमेकडे सरकतो असे त्यांचे मत होते. काहींनी अयन बिंदूला ग्रह मानले होते. भास्कराचार्यांनी मात्र खुद्द संपता बिंदूच विलोम दिशेत विचलीत होतो असे स्पष्ट लिहिले आहे. आधुनिक परिभाषेप्रमाणे भास्करचार्यांचा दृष्टिकोन शास्त्रशुद्ध आहे. भास्कराचार्यांच्या आधी होऊन गेलेल्या मुंजालाने एका कल्पात अयनभगण संख्या १९९६६९ मानली आहे. म्हणजेच अयन बिंदू एका कल्पात पृथ्वीभोवती १९९६६९ प्रदक्षिणा पूर्ण करतो. भास्कराचार्यांनी सिद्धांत शिरोमणीमध्ये अयन बिंदूचे हेच भगण गृहित धरले आहेत. भास्कराचार्यांनी वार्षिक अयन गती १ मिनिट म्हणजेच ६० सेकंद मानली आहे. आधुनिक गणितानुसार भास्कराचार्यांचे उत्तर जवळ जवळ १० सेकंदाने चुकीचे आहे. इसवी सन ११८३ साली त्यांनी

करणकुतुहल नावाचा एक ग्रंथ लिहिला होता त्यामध्ये त्यांनी अयनांशाची किंमत ११ अंश घेतली आहे. भास्कराचार्यांनी अयन बिंदूची गृहित धरलेली गती आणि ११८३ सालचे अयनांश, यावरून शके ४४५ साली म्हणजे इसवी सन ५२३ साली भारतीय मेष राशीचा प्रारंभ बिंदू व वसंत संपात बिंदू एकमेकाशी जुळत होते असा अर्थ निघतो. परंतु या सनासंबंधी पुष्कळच मतभेत आहेत. भारतीय ज्योतिष ग्रंथात शून्य आयनांशाची वर्षे पुढील प्रमाण घेतली आहे.

ग्रंथ	शक	इसवीसन
सूर्य सिद्धांत	४२१	४९९
मुंजाल	४४९	५२
करणकुतुहल	४४५	५२३
ग्रहलाघव	४४४	५२२
भास्वतीकरण	४५०	५२८
द्वितीय आर्य सिद्धांत	५२७	६०५
पराशर मत	५३२	६१०
दामोदरीय भटतुल्य	३४२	४२०

स्थूलमानाने शून्य अयनांश कोणत्या साली असू शकेल याचा अंदाज करता येईल. अयन बिंदूची वार्षिक गती ५० सेकंद आहे असे मानले तर सुमारे ७२ वर्षांनी तो एका अंशातून (७२× ५० = ३६०० सेकंद = १ अंश) सरकत असला पाहिजे. १९९३ सालचे आयनांश २३.७५ अंश आहेत असे मानले तर २३.७५ × ७२ = १७१० वर्षे. येतात ती १९९३ सालातून वजा केली तर २८३ साल (१९९३ - १७१० = २८३) येते. अशाप्रकारे इसवी सन २८३ च्या सुमाराला अयनांश शून्य होते, असे आपल्याला ढोबळ उत्तर मिळते. प्राचीन भारतीय ज्योतिष ग्रंथांनुसार येणारे अयनांश आणि आपल्याला मिळणारे उत्तर ह्यामध्ये सुमारे २०० वर्षांचा फरक येतो. असे का होते? ह्याचे उत्तर असे की नक्षत्रचक्राचा नेमका प्रारंभ बिंदू कोणता याबद्दल आचार्यांमध्ये मतभेद होते. उदाहरणार्थ टिळक पंचांगाचे अयनांश निर्णयसागर पंचांगापेक्षा ४ अंशाने कमी आहेत. म्हणजे त्या पंचांगानुसार १९९३ सालचे आयनांश १९.७५ अंश आहेत असे मानले तर १९.७५ × ७२ = १४२२ वर्षे १९९३ - १४२२ = ५७१, ह्याचा अर्थ टिळक

पंचांगानुसार शून्य आयनांश इसवी सन ५७१ साली होते. नक्षत्रचक्राचा प्रारंभ कोणता? हा भारतीय पंचांगामधील एक प्रचंड वादाचा मुद्दा आहे, त्याबद्दल अधिक चर्चा करण्याचे कारण नाही.

ज्या ब्राह्मस्फुट सिद्धांतावरून भास्कराचार्यांनी आपला सिद्धांत शिरोमणी हा ग्रंथ बेतला आहे, त्या ग्रंथात ब्रह्मगुप्ताने अयनचलना सारख्या महत्वाच्या विषयावर कोणताही प्रकाश टाकलेला नाही, किंवा त्यांच्या गतीचाही उल्लेख केलेला नाही. ह्या ब्रह्मगुप्ताच्या त्रुटीचा खुलासा खुद्द भास्कराचार्यांनीच केला आहे, ते लिहितात 'ब्रह्मगुप्तांना अयनचलनाचे ज्ञान झालेले होते, परंतु त्यांच्यावेळी अयनांश अत्यल्प होते त्यामुळेच त्यांनी ते ग्रहगणितासाठी वापरले नाही, आता आयनांशाची किंमत बरीच असल्यामुळे त्याचा गणनासाठी उपयोग केला पाहिजे, आचार्यांचे हे मत अगदी योग्य आहे.

स्वतः भास्कराचार्यांनी आपल्या प्रदीर्घ आयुष्यात अयन चलनाची गती मोजण्याचा प्रयत्न केल्याचं दिसत नाही. खरं म्हणजे त्यांनी अयनांशाच्या या भानगडीतून स्वतःची सुटका करून घेतली आहे, ते लिहितात "जस जसे कालमान वाढत जाईल तस तसे अयनांशातही बरेच अंतर पडत जाईल आणि मगच त्याचे योग्य आकलन होऊ शकेल. भगवत कृपेने गणकचक्रचूडामणी ब्रह्मगुप्ता सारख्या ग्रहगणितज्ञ विद्वानांचा पृथ्वीतलावर जन्म होईल आणि त्यांच्या संशोधनातून अयनचलनाच्या वार्षिक गतीचे ज्ञान होईल." अशाप्रकारे भास्कराचार्यांनी अयनगतीच्या वादात न पडता बुद्धिमान ग्रहगणितज्ञांनी विशिष्ट वेळी वेधाने निश्चित केलेल्या अयनांशांचाच उपयोग आपल्या ग्रंथात केला आहे.

* * *

२०



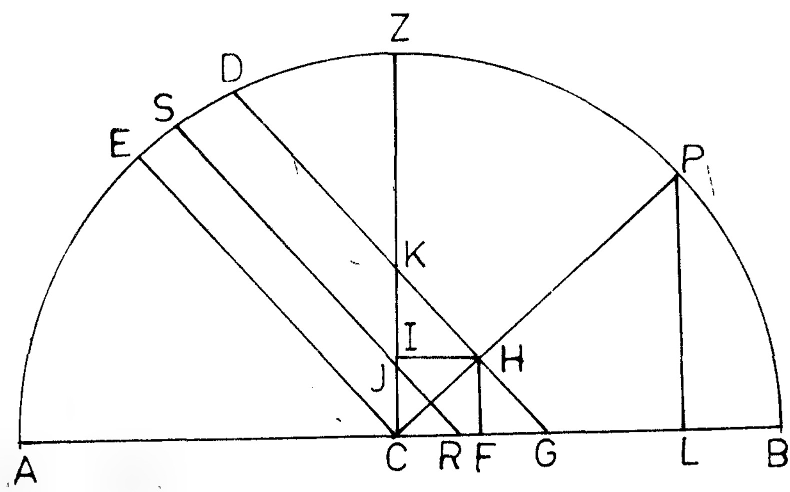
भास्कराचार्यांची आठ अक्षक्षेत्रे

गणित कितीही क्लिष्ट असले तरी त्याच्या सोप्या पद्धती शोधून काढण्यात प्राचीन भारतीय खगोलशास्त्रज्ञांचा हातखंडा आहे. भास्कराचार्य तर त्यातील अग्रणी आहेत. त्यांनी स्थानिक अक्षांशाशी निगडीत असलेले एकंदर, आठ समान काटकोन त्रिकोण ग्रहगणिताच्या त्रिप्रश्नाधिकारात दिले आहेत. अशा काटकोन त्रिकोणांना त्यांनी अक्षक्षेत्र असे नाव दिले आहे. प्रत्येक अक्षक्षेत्राचा एक कोन स्थानिक अक्षांशाबरोबर असतो.

अक्षक्षेत्रांपैकी एका काटकोन त्रिकोणाची पूर्ण माहिती मिळाली की बाकी सर्व काटकोन त्रिकोणाची माहिती आपोआप उपलब्ध होते. ह्या आठ काटकोन त्रिकोणापैकी एकाची माहिती प्रत्यक्ष प्रयोग करून हस्तगत करता येते. वसंत किंवा

शरद संपात दिनी म्हणजे आधुनिक काळात २१ मार्च किवा २३ सप्टेंबर ह्या दिवशी १२ अंगूळ ऊंचीच्या (उंचीला महत्व नाही.) शंकूची सावली बरोबर दुपारी १२ वाजता मोजली की एका काटकोन त्रिकोणाची पूर्ण माहिती मिळते. ह्या विशिष्ट सावलीच्या लांबीलाच पलभा असे नाव आहे. गोलीय त्रिकोणमितीचा उपयोग करून इतर सर्व त्रिकोणांची माहिती मिळविता येते पण ती पद्धत गणिताच्या दृष्टीने अवघड आहे.. भास्कराचार्यांच्या बुद्धीची चमक त्यांच्या अक्षक्षेत्रांच्या संकल्पनेवरून चांगलीच नजरेत भरते.

आकृतीमधील बिंदू आणि रेषा यांचे अर्थ पुढीलप्रमाण आहेत.



P : उत्तर ध्रूव

S : सूर्य : वसंत किंवा शरद संपात या दिवशी

Z : खस्वास्तिक (झेनिथ)

C : निरीक्षकाचे स्थान

AB : क्षितिज (होरायझन)

EC : वैषुविक वृत्त (सलेस्सिअल इक्वेटर)

DG : अहोरात्र वृत्त (ड्युनरल सर्कल), वैषुविक वृत्ताला समांतर

CP : ध्रूव ताऱ्याचीं दिशा (स्थान सापेक्ष)

CR : पलभा, वसंत किंवा शरद संपात दिनी शंकूची सावली

CZ : खस्वास्तिकाची दिशा

AESDZPG : याम्योत्तर वृत्त (मेरिडियन)

CJ : शंकूची उंची

१) पहिले अक्षक्षेत्र : काटकोन त्रिकोण RCJ

कोन CJR = स्थानिक अक्षांश

CJ = शंकू

CR = पलभा

RJ = अक्षकर्ण

२) दुसरे अक्षक्षेत्र : काटकोन त्रिकोण CLP

कोन LCP = स्थानिक अक्षांश

CL = लंबज्या

LP = अक्षज्या

CP = त्रिज्या

३) तिसरे अक्षक्षेत्र : काटकोन त्रिकोण CHG

कोन GCH = स्थानिक अक्षांश

CG = अग्रा

CH = क्रांतिज्या

GH = कुज्या

४) चौथे अक्षक्षेत्र : काटकोन त्रिकोण KGC

कोन CKG = स्थानिक अक्षांश

GK = तत् धृती

CG = अग्रा

GK = समशंकू

५) पाचवे अक्षक्षेत्र : काटकोन त्रिकोण CHK
कोन CKH = स्थानिक अक्षांश
CK = सम शंकू
CH = क्रांतिज्या
HK = कुज्योन तत्धृती

६) सहावे अक्षक्षेत्र : काटकोन त्रिकोण CFH
कोन FCH = स्थानिक अक्षांश
CH = क्रांतिज्या
CF = अग्रदि खंड (CG ह्या अग्राचा भाग)
HF = उन्मंडल शंकू
७) सातवे अक्षक्षेत्र : काटकोन त्रिकोण GFH
कोन GHF = स्थानिक अक्षांश
FH = उन्मंडल शंकू
FG = अग्रा खंड (CG ह्या अग्राचा भाग)
GH = कुज्या

८) आठवे अक्षक्षेत्र : काटकोन त्रिकोण HIK
कोन HKI = स्थानिक अक्षांश
IK = समशंकू उर्ध्वखंड (CR ह्या शंकूचा वरचा भाग)
IH = अग्रा दि खंड (CF = IH, CG ह्या अग्राचा भाग)
HK = तत् धृती उर्ध्व खंड (GK ह्या तत् धृतीचा वरचा भाग)

वर दिलेल्या सर्व आठ काटकोन त्रिकोणांचा एक कोन स्थानिक अक्षांश आहे. अर्थात सर्व काटकोन त्रिकोण समान (सिमिलर) आहेत. ह्या काटकोन त्रिकोणात भारतीय खगोलशास्त्रातील काही तांत्रिक संज्ञांचा आपोआप समावेश झाला आहे. भास्कराचार्यांच्या ह्या आठ अक्षक्षेत्रांच्या साह्याने खगोलीय गणितासाठी लागणारी अनेक सूत्रे आपोआप उपलब्ध होतात. अक्षक्षेत्रांवरून अक्षज्या व लंबज्या ह्या दोहोंची मिळून किंमत ६३ प्रकारांनी काढता येते. तसेच त्यांचेवरून अक्षरशः शेकडो प्रकारची समीकरणे लिहिता येतात.

काटकोन त्रिकोण CLP हे संदर्भ क्षेत्र म्हणून घेण्यात येते कारण त्यामधीलCP ही त्रिज्या माहित आहे. भारतीय खगोलशास्त्रात ह्या त्रिज्येची लांबी 3438 मानली आहे. त्यामुळे स्थानिक अक्षांश माहित असेल तर CL आणि LP ह्या रेषांची म्हणजेच लंबज्या व अक्षज्या ह्यांची लांबी निश्चित करता येते. अशाप्रकारे पहिली दोन अक्षक्षेत्रे पूर्णपणे माहित असतात त्यावरून इतर सर्व अक्षक्षेत्रांमधील निरनिराळ्या किंमती काढता येतात.

भास्कराचार्यांची ही आठ अक्षक्षेत्रे म्हणजे एक कल्पवृक्षच आहे. त्यांचेमधून खगोलशास्त्रातील अनेकविध माहिती विनासायास हस्तगत करता येते.

***

२१

गती आणि बिंब

सूर्य, चंद्र आणि ग्रह कधी पृथ्वीपासून दूर असतात तर कधी जवळ असतात. जस जसा ग्रह पृथ्वीपासून दूर जाईल तस तसे त्या ग्रहाचे बिंब लहान होत जाते व गतीही कमी कमी होत जाते. तसेच ग्रह जस जसा पृथ्वीच्या जवळ येत जातो, तस तसे त्या ग्रहाचे बिंब मोठे मोठे होते व त्याची गतीही वाढत जाते. म्हणजेच ग्रहाचे बिंब त्याच्या गतीच्या प्रमाणात बदलते. अर्थात ग्रहाची गती माहित असेल तर त्याच्या बिंबाचा आकारही निश्चित करता येतो. भास्कराचार्यांचे हे सर्व विश्लेषण अगदी शास्त्रशुद्ध आहे.

भास्कराचार्यांची चंद्र व सूर्य ह्यांची मोजमापे पुढीलप्रमाणे आहेत.

भूमध्यापासून सूर्याचे अंतर	=	६८९३७७ योजने
भूमध्यापासून चंद्राचे अंतर	=	५१५६६ योजने
रविबिंबाचा व्यास	=	६५२२ योजने
चंद्र बिंबाचा व्यास	=	४८० योजने
सूर्य व चंद्र यांची दैनंदिन गती	=	११८५९ योजने.

एक योजन बरोबर सरासरी ८ किलोमटिर असे मानले तरी आधुनिक मानाने वरील अंतरे व आकार चुकीचे आहेत हे सांगायला नकोच. आधुनिक मोजमापे अशी आहेत :

भूमध्यापासून सूर्याचे अंतर	=	१५०००००० किलोमीटर
भूमध्यापासून चंद्राचे अंतर	=	३८४००० किलोमीटर
सूर्याचा व्यास	=	१४००००० किलोमीटर
चंद्राचा व्यास	=	३४७५ किलोमीटर

तरीही भास्कराचार्यांनी वर दिलेली मोजमापे वापरून रवि व चंद्र यांच्या बिंबाचे आकार बरोबर ठरविले आहेत. त्यांनी एक साधे त्रैराशिक वापरले आहे.

११८५९ योजनगतीसाठी रविबिंब ६५२२ योजनांचे असते तर विशिष्ट कलात्मक गती असताना रविबिंब केवढे असेल? ह्या त्रैराशिकावरून रविबिंबाच्या आकारासाठी पुढील सूत्र मिळते.

$$\text{कोनीय मिनिटांमधील रविबिंब} = \frac{\text{६५२२} \times \text{रविगति}}{\text{११८५९}}$$

$\therefore$ कोनीय मिनिटातील रविबिंब $= \dfrac{११ \times \text{रविगति}}{२०} = \dfrac{\frac{११}{१०} \text{ रविगति}}{२}$

कोनीय मिनिटातील रविबिंब $= \dfrac{\text{रविगति} + \dfrac{\text{रविगती}}{१०}}{२}$

आधुनिक किंमती वापरून आपल्याला भास्कराचार्यांच्या सूत्राने किती आकारचे रविबिंब मिळते पाहू.

जानेवारीच्या ४ तारखेला रविची दैनंदिन गती ६१ मिनिटे १० सेकंद दिलेली आहे.

$\therefore$ रविबिंब $= \dfrac{६१.१६६ + \dfrac{६१.१६६}{१०}}{२} = \dfrac{67.28}{2} = 33\ 6$ मिनिटे.

४ जानेवारीला रवि पृथ्वीच्या अगदी जवळ असतो त्यादिवशी त्याच्या बिंबाचा आकार अधिकतम असतो. अर्थात भास्कराचार्यांचे सूत्र योग्य आहे.

जून महिन्यात, सूर्य पृथ्वीपासून जास्तीतजास्त दूर असतो. त्या महिन्यात सूर्याची दैनंदिन गती ५७ मिनिटे व १५ सेकंद दिली आहे. म्हणून त्या महिन्यात

रविबिंब $= \dfrac{५७.२५ + \dfrac{५७.२५}{१०}}{२} = ३१.५$ मिनिटे.

चंद्रासाठी भास्कराचार्यांचे त्रैराशिक असे आहे :

११८५९ योजनेगती असताना चंद्र बिंबाचा आकार ४८० योजने असतो तर विशिष्ट कलात्मक गती असताना चंद्रबिंब केवढे असेल ?

$\therefore$ चंद्रबिंब $= \dfrac{४८० \times \text{चंद्रगती}}{११८५९} = \dfrac{३ \times \text{चंद्रगती}}{७४}$

चंद्रबिंब $= \dfrac{३ \times \text{चंद्रगती}}{७४} - २९ + २९$

चंद्रबिंब $= \dfrac{\text{चंद्रगती} - ७१५}{२५} + २९$

पंचागावरून कमीत कमी आणि जास्तीत जास्त दैनंदिन चंद्रगती ७०८ ते ८८२ मिनिटे असतात असे दिसते.

$$\therefore \quad \text{लहानात लहान चंद्रबिंब} = \frac{७०८ - ७१५}{२५} + २९ = २९ \text{ मिनिटे सुमारे}$$

$$\text{मोठ्यात मोठे चंद्रबिंब} = \frac{८८२ - ७१५}{२५} + २९ = ३५.५ \text{ मिनिटे.}$$

भास्कराचार्यांचा मोठ्यात मोठ्या चंद्रबिंबाचा आकार जरा जास्त वाटतो. पण सूर्य चंद्राच्या बिंबाचे आकार फारसे चुकलेले नाहीत.

***

(२२) नाक्षत्र व सौरदिन यामधील फरक

पृथ्वी पश्चिमेकडून पूर्वेकडे २४ तासात स्वतः भोवती एक प्रदक्षिणा पूर्ण करते, त्यामुळे नक्षत्रचक्र, ग्रह, सूर्य, चंद्र वगैरे सर्व खगोलीय ज्योती पूर्वेकडे उगवून पश्चिमेकडे मावळतात असा आपल्याला भास होतो. पृथ्वी स्थिर आहे असे मानले तर खगोलीय ज्योती २४ तासात पृथ्वीभोवती प्रदक्षिणा घालतात असे म्हणावे लागेल. प्रत्यक्षात आपल्याला तसेच दृश्य दिसते. पृथ्वीचे स्वांगभ्रमण चालू असताना ती आपल्या कक्षेत थोडी-थोडी पुढे सरकत असते आणि सुमारे ३६५ दिवसात सूर्याभोवती एक प्रदक्षिण पूर्ण करते, याचा अर्थ प्रतिदिनी पृथ्वी सरासरी एका अंशातून आपल्या कक्षेत पुढे जाते. पृथ्वीच्या या कक्षागतीमुळे सूर्य, चंद्र आणि ग्रह दररोज पश्चिमेकडून पूर्वेच्या दिशेत सरकतात. पृथ्वीच्या दैनंदिन गतीपेक्षा ही गती उतीशय अल्प असल्यामुळे सूर्य, चंद्र आणि ग्रह दररोज थोडे-थोडे पश्चिमेकडून पूर्वेकडे सरकतात ही गोष्ट आपल्या लक्षातही येत नाही.

भास्कराचार्यांनी ग्रह आणि सूर्य, चंद्रांची ही पूर्वाभिमुख गती एक उत्तम दृष्टांत देऊन समजून दिली आहे, कशी ते पहा, समजा एखादा कुंभार आपले चक्र पश्चिमाभिमुख दिशेत फिरवीत असेल आणि समजा त्या चाकावर असलेला एक कीटक हळू हळू गतीने पूर्वेच्या दिशेत सरकत असेल तर आपल्याला काय दृश्य दिसेल? आपल्याला वाटेल की तो कीटक चाकाबरोबर पश्चिमेकडेच गतीमान आहे कारण चाकाच्या तुलनेत कीटकाची गती अत्यल्प आहे. त्यामुळे चाकाच्या गतीच्या विरुध्द दिशेत तो मार्गाक्रमण करती असूनही चाकाच्याच दिशेत गतीमान आहे असे आपल्याला भासते. आकाशातील ग्रहांचे असेच आहे.

प्रत्यक्ष वेधाने वरील गोष्ट पडताळून पहता येते. त्यासाठी आचार्य लिहितात, समाज एखाद्या दिवशी सूर्यास्ताच्या वेळीच एखाद्या नक्षत्राचा आणि ग्रहाचा अस्त पहायला मिळाला तर दुसऱ्या दिवशी नक्षत्राचा अस्त प्रथम होईल आणि ग्रहाचा अस्त त्यानंतर थोड्या वेळाने होईल. ही गोष्ट ग्रह पूर्वेकडे सरकत असेल तरच शक्य आहे. समजा असेच निरीक्षण सूर्योदयाच्या वेळी केले आणि नक्षत्र आणि ग्रह

एकाच वेळी उगवताना पहायला मिळाले तर दुसऱ्या दिवशी नक्षत्राचा उदय झाल्यावरर काही वेळाने ग्रहाचा उदय होईल. जी गोष्ट ग्रहांच्यासाठी दृष्टीला पडते तीच सूर्यचंद्रासाठीही पहायला मिळते.

याही पुढे जाऊन भास्कराचार्यांनी नाक्षत्र वर्ष आणि सावन वर्ष यामधील फरक स्पष्ट केला आहे. समजा एखाद्या विशिष्ट दिवशी विशिष्ट नक्षत्राबरोबर सूर्याचा उदय झाला तर दुसऱ्या दिवशी ते नक्षत्र पूर्वक्षितिजावर प्रथम उगवताना दिसेल पण त्या बरोबर सूर्याचा उदय होणार नाही, सूर्य थोड्या वेळाने उगवेल. सूर्य आणि ते विशिष्ट नक्षत्र यामधील अंतर सूर्याच्या पूर्वाभिमुख गतीमुळे हळु हळु वाढत जाईल आणि नंतर बरोबर एका वर्षाने रवी पुन्हा त्याच नक्षत्राबरोबर उगवेल. ह्याचा अर्थ विशिष्ट नक्षत्राची पृथ्वीभोवती ३६० भ्रमणे पूर्ण झाली की सूर्याची ३५९ भ्रमणे पूर्ण होतील. भास्कराचार्यांनी एका सौर वर्षातील सावन दिन संख्या ३६५ दिवस १५ घटी १० पळे २२ विपळे आणि ३० प्रति विपळे इतकी सूक्ष्म घेतली आहे. दशांश अपूर्णांकातील ही किंमत आहे ३६५.२५७२ दिवस. नाक्षत्र वर्ष आणि सौर वर्ष यांचेमध्ये एका दिवसाचा फरक पडतो, किंवा २४ × ६० = १४४० मिनीटांचा फरक पडतो. ३६५.२५७२ दिवसात १४४० मिनिटे फरक तर एका दिवसात किती फरक पडेल. ह्या साध्या त्रैराशिकानुसार विशिष्ट नक्षत्र व सूर्य यांचे मध्ये एका दिवसात ३ मिनिटे ५६ सेकंद एवढा फरक पडेल. हा फरक बरोबर आधुनिक माना एवढाच आहे.

***

२३

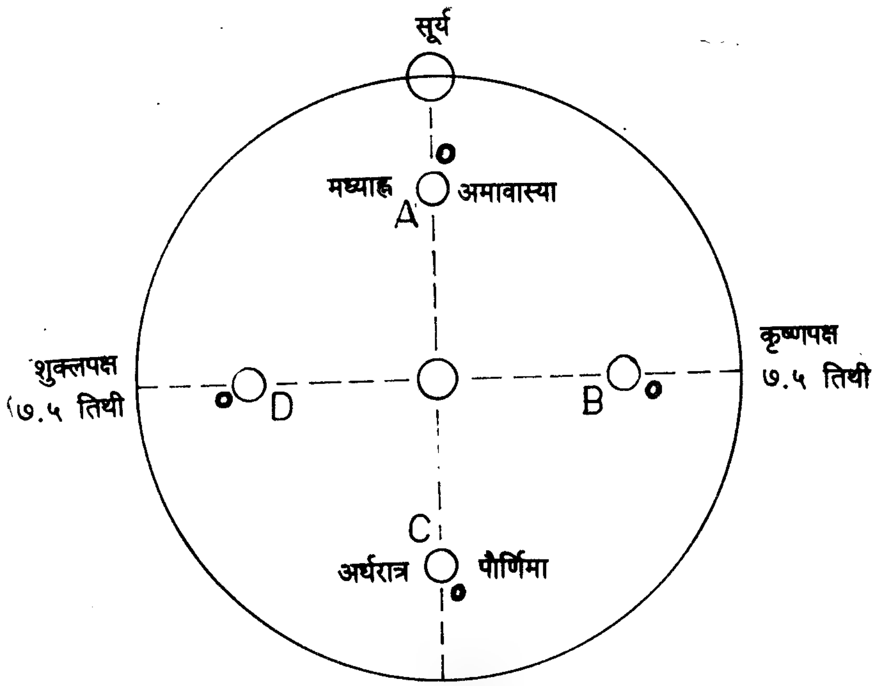
चंद्रावरील दिवसरात्र

चंद्राच्या पृष्ठावरून काय दृश्य दिसेल, याचे अचुक वर्णन भास्कराचार्यांनी केले आहे. त्यावरून त्यांच्या कल्पनाशक्तीची चमक लक्षात येते. आठशे वर्षांपूर्वी होऊन गेलेल्या एका विद्वानाची प्रतिभा पाहून आश्चर्य वाटल्याशिवाय रहात नाही. चंद्राच्या पृष्ठभागावर पितर लोक रहातात अशी आचार्यांनी कल्पना केली आहे. पितर म्हणजे मृतात्मे त्यांच्या विचेचनातील हा अशास्त्रीय भाग सोडला तरी त्यांनी चंद्रपृष्ठावरून दिसणाऱ्या दृश्याचे यथायोग्य वर्णन केले आहे.

जसे भूपृष्ठवासी लोक आकाशत चंद्राला पहातात त्याचप्रमाणे चंद्रपृष्ठावर रहाणारे लोक आकाशत पृथ्वीला पहातात. चंद्रपृष्ठवासियांसाठी आकाशातील पृथ्वी चंद्रासारखीच दिसते. अमावास्येला चंद्रवासी लोक आपल्या मस्तकावर सूर्याला पहातात, अर्थात् अमावास्येच्या दिवशी चंद्रपृष्ठावर मध्यान्ह असणार हाच तेथील दिनार्ध आहे. या ठिकाणी आचार्यांनी पृथ्वीच्या विरूद्ध दिशेला असणारे चंद्रपृष्ठ गृहीत धरले आहे. अमावास्येपासून ६ राशी दूर म्हणजे १८० अंशावर पौर्णिमा होते. त्या दिवशी चंद्रवासी लोकांची अर्धरात्र असते.

एका विशिष्ट स्थानापासून ३ राशी म्हणजे ९० अंशावर कृष्णपक्षाची ७.५ तिथी असताना चंद्राच्या क्षितिजावर सूर्योदय होतो. त्याच प्रमाणे शुक्ल पक्षाच्या ७.५ तिथीला चंद्रावर सूर्यनारायणाचा अस्त होतो. याचा अर्थ चंद्रावरील विशिष्ट स्थानी १५ तीर्थींचा म्हणजेच सुमारे १५ दिवसांचा दिवस व १५ दिवसांची रात्र असते. भास्कराचार्यांचे विवरण सोबतच्या आकृतीवरून सहज लक्षात येईल.

अमावास्येच्या दिवशी चंद्रावरील ह्या O बिंदूपाशी सूर्य डोक्यावर दिसेल व तिथे मध्यान्ह असेल. O हा बिंदू पृथ्वीच्या नेहमी विरुध्द दिशेत रहाणार आहे हे लक्षात ठेवा. तसेच पौर्णिमेच्या दिवशी चंद्रावरील O हा बिंदू सूर्याच्या विरुध्द दिशेत असल्यामुळे तेथे अर्धरात्र असणार आहे. कृष्णपक्षाच्या ७.५ तिथीला चंद्रावरील O ह्या बिंदूसंदर्भात सूर्याचा उदय होईल व सूर्य चंद्राच्या पूर्व क्षितिजावर दिसू लागेल. त्यानंतर शुक्ल पक्षाच्या ७.५ व्या तिथीपर्यंत O ह्या बिंदूवर सूर्याचे किरण सतत



पडणारे आहेत म्हणजेच तेथे सतत दिवस असणार आहे. पण त्यानंतर मात्र O ह्या बिंदूवर सूर्याचा प्रकाश पडणार नाही आणि पुढील १५ दिवस तेथे अंधाराचे साम्राज्य पसरेल.

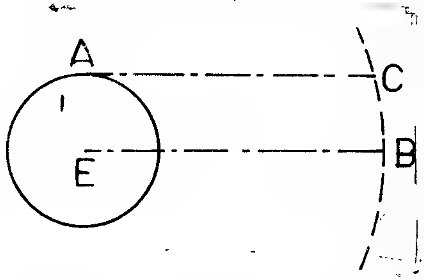
***

(२४) चंद्राचे अंतर आणि त्रिज्या

प्राचीन भारतीय खगोलशास्त्रज्ञ उत्तम आकाश निरीक्षक असावेत याबद्दल दुमत असण्याचे कारण नाही. अत्याधुनिक साधने तर सोडाच पण दुर्बिणी सारखे उपकरणही त्यांना उपलब्ध नव्हते, तरिही अत्यंत सूक्ष्म निरीक्षणाने आणि काही साध्या यंत्रांचा उपयोग करुन त्यांनी खगोलशास्त्रातील काही महत्वाच्या गोष्टी शोधून काढल्या. भास्कराचार्यही प्रत्यक्ष आकाश निरीक्षण करणारे चिकित्सक खगोलशास्त्रज्ञ होते, त्यामुळेच त्यांनी सिध्दांत शिरोमणीमध्ये काही मूलभूत गोष्टींचाही समावेश केल्याचे आढळते.

सूर्यग्रहणाचे वेळी सूर्य आणि चंद्र यांची युती होण्याचा गणिताने निश्चित केलेला क्षण आणि विशिष्ट ठिकाणाहून प्रत्यक्ष निरीक्षण केलेला क्षण यात फरक पडतो हे फार प्राचीन काळी भारतीय खगोलशास्त्रज्ञांच्या लक्षात आले होते. असे का होते? या प्रश्नाचे उत्तर शोधून काढण्याच्या प्रयत्नात त्यांना भूकेंद्र पराशयाचा पत्ता लागला. भूकेंद्र पराशयाचे इंग्रजी नाव आहे 'जिओसेंट्रिक पॅरॅलॅक्स'.

सूर्य किंवा चंद्र ग्रहणाचे गणित करताना पृथ्वीच्या केंद्राच्या संदर्भात केले जाते. वास्तविक निरीक्षक मात्र त्या बिंदूपासून पृथ्वीच्या त्रिज्जे एवढ्या अंतरावर असतो कारण खगोलाचे निरीक्षण पृथ्वीच्या पृष्ठभागावरून करण्यात येते. अर्थातच निरीक्षकाची प्रत्यक्ष स्थिती आणि गणितासाठी उपयोगात आणलेला बिंदू यामध्ये पुष्कळच अंतर आहे. त्यामुळेच भूकेंद्र पराशय निर्माण होते. भास्कराचार्यांनी भूकेंद्र पराशयाचे फार उत्तर विश्लेषण सिध्दांत शिरोमणीमध्ये केले आहे. पुढील आकृतीच्या साह्याने भास्कराचार्यांचे स्पष्टीकरण समजून घेता येईल.



आकृतीमधील E हा बिंदू, पृथ्वीचे केंद्र तर A हा बिंदू पृथ्वीच्या पृष्ठभागावरील

निरीक्षकाचे स्थान दर्शवितो. BC हा अहोरात्र वृत्ताचा चाप आहे. त्यापैकी B हा बिंदू E ह्या पृथ्वीकेंद्राच्या क्षितिचावर आहे तर C हा बिंदू निरीक्षकाच्या म्हणजेच A ह्या बिंदूच्या क्षितिजावर आहे. हा चाप पृथ्वीच्या त्रिज्जे एवढाच असून तो आक्रमण करण्यासाठी चंद्राला ४ घटिका किंवा १ तास ३६ मिनिटांचा काळ लागतो. हा विशिष्ट काळ घेण्याचे कारण असे की ग्रहण क्षितिजाजवळ लागले तर ग्रहण प्रारंभ होण्याचा गणिताने काढलेला क्षण व प्रत्यक्ष निरीक्षणचा क्षण यात जास्तिजास्त फरक ४ घटिकांचा किंवा १ तास ३६ मिनिटांचा पडतो, हे भारतीय खगोलशास्त्रज्ञांच्या लक्षात आले होते.

चार घटिकांमध्ये चंद्र पृथ्वीच्या त्रिज्जेएवढे अंतर कापतो असे मानले तर एका दिवसात म्हणजेच ६० घटिकांमध्ये, चंद्र पृथ्वीच्या त्रिज्जेचा १५ पट अंतर आक्रमित असला पाहिजे. भास्कराचार्यांनी पृथ्वीच्या व्यास १५८१.०४१६ योजने घेतला आहे. त्याप्रमाणे पृथ्वीची त्रिज्जा येते १५८१.०४१६/२ = ७९०.५२०८, ह्या त्रिज्जेच्या १५ पट अंतर म्हणजे सुमारे ११८५८ योजने होतात. अर्थात भास्कराचार्यांचा चंद्र एका दिवसात ११८५८ योजने एवढे अंतर कापतो. कोनाच्या भाषेत बोलायचे झाल्यास चंद्राची दैनंदिन गती ७९० कोनीय मिनिटे ३५ कोनीय सेकंद आहे. ह्या किमतीला १५ ने भागले तर चंद्राचा जास्तितजास्त भूकेंद्र पराशय मिळतो. तो साधारण ५२ कोनीय मिनिटे ४२ कोनीय सेकंद आहे. प्रत्यक्ष, आणि गणिताने काढलेल्या चंद्र व सूर्य यांच्या युतीमधील फरक भूकेंद्र पराशयामुळे निर्माण होत असल्यामुळे त्याला बीज संस्कार किंवा दुरुस्ती असते म्हटले जाते.

भास्कराचार्यांनी चंद्राच्या कक्षेची व प्रत्यक्ष चंद्राची त्रिज्जा काढण्यासाठी भूकेंद्र पराशयाचा उपयोग करून घेतला. चंद्राची दैनंदिन कोनीय गती सरासरी ७९० मिनिटे ३५ सेकंद आहे आणि ती ११८५८ योजनांबरोबर आहे तर ३६० अंश म्हणजेच ३६० x ६० = २१६०० मिनिटे म्हणजे किती अंतर ह्या साध्या त्रैराशिकानुसार चंद्राच्या कक्षेचा परीघ येतो.

११८५८ x २१६००/७९०.५८३ = ३२३९७९ योजने म्हणजे चंद्राच्या कक्षेचा परीघ ३२४००० योजने घ्यायला हरकत नाही. त्यावरून चंद्राच्या कक्षेची त्रिज्जा पुढीलप्रमाणे मिळते चंद्राच्या कक्षेची त्रिज्जा = ३२४०००/२ x पाय येथे पायची किंमत ३.१४१६ आहे असे गृहित धरले तर चंद्राच्या कक्षेची त्रिज्या =

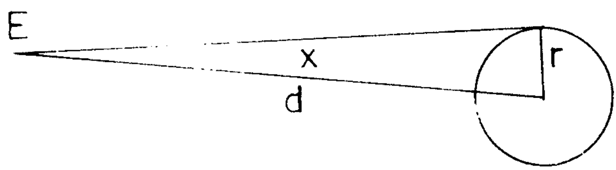
५१५६६ योजने. एक योजन म्हणजे ८ किलोमीटर अंतर असे गृहीत धरल्यास चंद्राच्या कक्षेची त्रिज्जा = ५१५६६ x ८ = ४१२५२८ किलोमीटर.

भास्कराचार्यांनी चंद्रबिंबाची सरासरी त्रिज्जा १६ कोनीय मिनिटे मानली होती. तसेच संदर्भ वर्तुळाची त्रिज्जा ३४३८ मिनिटे घेण्यात येते. त्यामुळे ३४३८ मिनिटांबरोबर ५१५६६ योजने एवढे अंतर असेल तर १६ मिनिटे बरोबर किती अंतर या साध्या त्रैराशिकावरून चंद्राच्या त्रिज्जेचा अंदाज करता येतो.

चंद्राची त्रिज्जा = ५१५६६ x १६/३४३८ = २४० योजने.

= २४० x ८ = १९२० किलोमीटर

चंद्र कक्षेची त्रिज्जा म्हणजेच चंद्र व पृथ्वी यामधील सरासरी अंतर आणि चंद्राची त्रिज्जा यांच्या आधुनिक किंमती व भास्कराचार्यांनी मिळविलेल्या किंमती यात फारसा फरक नाही. आधुनिक गणितानुसार चंद्र व पृथ्वी यामधील सरासरी अंतर आहे ३८४००० किलोमीटर आणि चंद्राची त्रिज्जा आहे १७३४ किलो मीटर.



आधुनिक गणिताप्रमाणे चंद्राची त्रिज्जा पुढील आकृतीच्या साह्याने काढता येते. आकृतीमधील E हा बिंदू पृथ्वीचे केंद्र दर्शवितो आणि AB ही चंद्र बिंबाची त्रिज्जा आहे. x हा चंद्रबिंबाच्या त्रिज्जेने पृथ्वीकेंद्राशी केलेला कोन आहे आणि d हे चंद्र व पृथ्वी यामधील सरासरी अंतर आहे. कोणत्याही कोनासाठी पुढे दिलेली व्याख्या वापरता येते.

$$\text{कोन} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्जा}}$$

आपल्या आकृतीत त्रिज्जा म्हणजेच चंद्र आणि पृथ्वी यामधील d हे सरासरी अंतर आहे व चाप म्हणजेच चंद्राची त्रिज्जा त्यामुळे

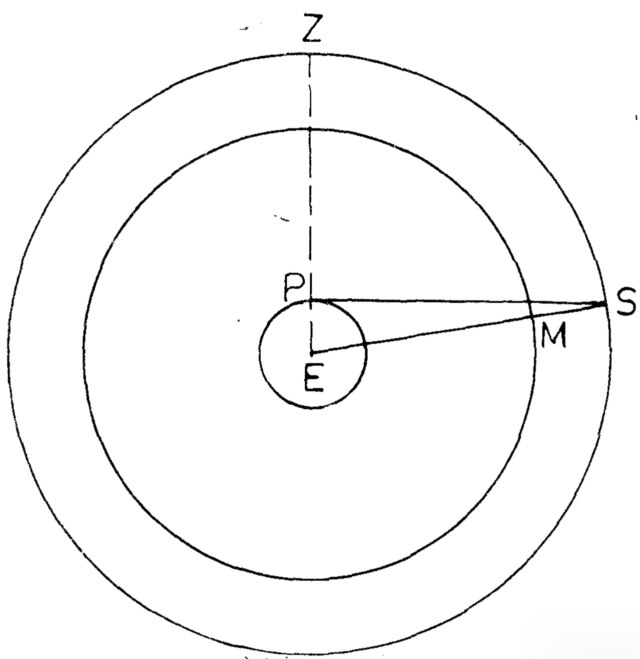
$$\text{कोन} = x = \frac{\text{चंद्राची त्रिज्जा}}{\text{चंद्र व पृथ्वी यातील सरासरी अंतर}}$$

वरील व्याख्येतील कोन रेडियनमध्ये मोजण्यात येतो. परंतू भारतीयांचा एक रेडियन ३४३८ मिनिटांबरोबर आहे, अर्थात १६ मिनिटांची रेडियनमधील किंमत १६/३४३८ रेडियन येईल. वरील सूत्रात माहित असलेल्या किंमती घातल्या की आपल्याला पुढील समीकरण मिळेल.

$$\frac{१६}{३४३८} = \frac{\text{चंद्राची त्रिज्जा}}{\text{५१५६६ योजने}}$$

$$\text{म्हणून, चंद्राची त्रिज्जा} = \frac{१५१६६ \times १६}{३४३८} = २४० \text{ योजने}$$

$$= २४० \times ८ = १९२० \text{ किलोमीटर}$$



भास्कराचार्यांनी भूकेंद्र पराशयाची संकल्पना सूर्यग्रहण या प्रकरणात विषद केली आहे ती अशी.

आकृतीमध्ये E हा बिंदू पृथ्वीचे केंद्र, P हा बिंदू निरीक्षकाची स्थिती आणि M व S हे बिंदू अनुक्रमे चंद्र व सूर्य दर्शवितात. आकृतीमधील चंद्र व सूर्य भूकेंद्राच्या सापेक्ष युतीमध्ये आहेत. PS ह्या रेषेला भास्कराचार्यांनी दृक-सूत्र असे नाव दिले आहे. दृक्-सूत्र म्हणजेच दृष्टी रेषा. ES ह्या रेषेला भास्कराचार्य गर्भ-रेषा म्हणतात. गर्भरेषा म्हणजेच केंद्र रेषा. PSE हो कोन सूर्याच्या संदर्भात चंद्राचा पराशय दर्शवितो. चंद्र (M) व सूर्य (S) हे EZ ह्या रेषेवर असतील तर दृक्-सूत्र आणि गर्भ-सूत्र परस्परांशी जुळतात त्यामुळे Z बिंदूपाशी पराशय शून्य असते. पराशयासाठी भास्कराचार्यांनी लंबन असा शब्द वापरला आहे. Z हा खमध्य किंवा खस्वस्तिक बिंदू आहे, त्यामुळे भास्कराचार्यांनी खमध्ये नास्ति लंबनम्' असे म्हटले आहे. तसेच कोन ९० अंशाचा असताना पराशय किंवा लंबन जास्तिजास्त ४ घटिका असते.

* * *

(२५)

अधिक मासाची उपपत्ती

अमावास्येच्या दिवशी चंद्र व सूर्य एकमेकांच्या जवळ असतात. चंद्र हा सूर्यापेक्षा गतिमान असल्यामुळे अमावास्येनंतर तो सूर्याच्या पुढे निघून जातो. दोघांमधील अंतर दिन प्रती दिन वाढत जाते व पुन्हा चंद्र सूर्याजवळ येऊन पोहोचतो आणि अमावास्या होते. एका आमावास्येपासून दुसऱ्या अमावास्येपर्यंतच्या काळाला चांद्रामास असे म्हणतात.

पृथ्वीभोवती एक प्रदक्षिणा पूर्ण करण्यासाठी चंद्राला २७ दिवस ७ घटिका ४३ पळे व १२.१ विपळे लागतात असे भास्कराचार्यांनी गृहित धरले आहे. दशांश अपूर्णांकात ही किंमत २७.३०८८ दिवस येते. यावरून चंद्राची सरासरी दैनंदिन गती पुढीलप्रमाणे मिळते.

चंद्राची सरासरी दैनंदिन गती = ३६०/२७.३०८८ = १३.१८२५ अंश

= १३.१८२५ × ६० = ७९०.९५ मिनिटे

सूर्याची सरासरी दैनंदिन गती = ३६०/३६५.२५७२ = ५९ मिनिटे म्हणून चंद्र व सूर्य यांच्या दैनंदिन गतींमध्ये सरासरी फरक येतो ७९०.९५ - ५९ = ७३१.९५ मिनिटे

याच गतीने चंद्र एका अमावास्येपासून दुसऱ्या अमावास्येपर्यंत अंतर कापतो. यावरून साध्या त्रैराशिकाने चांद्रमासाचे मान निश्चित करता येते.

७३१.९५ मिनिटांसाठी १ सावन दिवस तर ३६० × ६० = २१६०० मिनिटांसाठी किती दिवस.

∴ चांद्रमास = २१६०० × १ सावन दिवस/७३१.९५ मिनिटे

= २९ दिवस १२ तास १४ मिनिटे ४२ सेकंद

= २९.५१०२ दिवस

भास्कराचार्यांनी चांद्रमासाचे मान २९ दिवस ३१ घटी ५० पळे म्हणजेच २९.५३ दिवस घेतले आहे.

त्यानंतर भास्कराचार्य अधिक मासाची उपपत्ती सांगतात. सौरमासापेक्षा चांद्रमास

लहान आहे. ह्या दोन प्रकारच्या महिन्यात सावन दिन संख्या पुढे दिल्याप्रमाणे आहेत.

एका सौरमासातील सावन दिन = ३६५.२५७२/१२ = ३०.४३८१

एका चांद्रमासातील सावन दिन = २९.५३

एका सौरमासात ३०.४३८१ - २९.५३ = ०.९०८१ सावन दिनांचे अंतर पडते. ०.९०८१ सावन दिनांचे अंतर १ सौरमासात पडत असेल तर एका चांद्रमासा इतके म्हणजे २९.५३ दिवसांचे अंतर किती सौरमासात पडेल? या त्रैराशिका वरून

एका चांद्रमासाइतके अंतर पडण्याचा काळ = २९.५३ × १/०.९०८१
= ३२.५१८४ सौरमास

याचा अर्थ असा की ३२.५१८४ सौरमासात एक चांद्रमास अधीक घेतला तर दोन्ही मास जुळून येतील.

***

२६



ग्रहांच्या भ्रमणाचा काळ

फार प्राचीन काळापासून पृथ्वी हाच विश्वाचा केंद्रबिंदू मानण्याची प्रथा होती. सूर्य हा तारा असला तरी त्याला ग्रह अशीच संज्ञा दिली जात असे. तसेच चंद्र हा जरी पृथ्वीचा उपग्रह असला तरी तो ग्रह म्हणूनच मानला जायचा. आज आपण सूर्यापासून क्रमाने दूर असणारे ग्रह सांगतो, पण त्या काळी पृथ्वीपासून ग्रहांची

क्रमवारी लावली जात असे, त्यामुळे पृथ्वीपासून सर्वात जवळ असलेला ग्रह चंद्र, त्यानंतर शुक्र, बुध, सूर्य, मंगळ, गुरू व शनी असे ग्रहांचे क्रम होते. युरेनस, नेपच्यून व प्लुटो हे ग्रह त्याकाळी माहीत नव्हते हे सांगायला नकोच. इसवी सन ५०० च्या सुमाराला होऊन गेलेल्या पहिल्या आर्यभटाला पृथ्वी स्वतः भोवती भ्रमण करते हे माहीत होते, पण त्यानंतरच्या आचार्यांनी आर्यभटाच्या ह्या महत्वाच्या सिध्दांताला पाठिंबा दिला नाही. ग्रहांच्या पृथ्वीकेंद्र संकल्पनेत निदान भारतात तरी भास्कराचार्यांपर्यंत कोणताही बदल झाला नाही.

विश्वनिर्मितीच्या क्षणापासून म्हणजे ब्रम्हाच्या दिवसाचा प्रारंभ झाल्यापासून म्हणजेच एक कल्प या काळात ग्रह किती पृथ्वीप्रदक्षिण करतात त्या संख्येला सर्व आचार्यांनी भगण असे नाव दिले आहे. विशिष्ट ग्रह एकदा रेवती नक्षत्राच्या आरंभबिंदूपाशी आला की पुन्हा त्याला त्या बिंदूपाशी येण्यासाठी जो काळ लागते त्याला १ भगण असे म्हणतात. अर्थात एका कल्पात प्रत्येक ग्रहाचे भगण प्रचंड असणार हे उघड आहे. ह्या संख्या पूर्वाचार्यांनी निश्चित केल्या आहेत. विशेषतः ब्रह्मगुप्ताने जे भगण निश्चित केले होते तेच भास्कराचार्यांनी आपल्या गणितासाठी वापरले आहेत. एका कल्पात किती वर्षे असतात हे माहीत असल्यामुळे भगणांच्या साह्याने ग्रहांना एक पृथ्वी प्रदक्षिण करायला किती वेळ लागेल ते सहज काढता येईल.

एक कल्प या काळात ग्रहांनी व त्यांच्या शिघ्रोच्च, नीचोच्च आणि पात या बिंदूनी घातलेल्या पृथ्वी प्रदक्षिणांचे म्हणजेच भगणांचे कोष्टक पुढे दिले आहे. शिघ्रोच्च याचा अर्थ ग्रहाचा पृथ्वी सन्निध बिंदू, नीचोच्च याचा अर्थ पृथ्वीपासून दूर असणारा बिंदू. त्यांनाच उपभू आणि अपभू अशा संज्ञा आहेत. तसेच पात म्हणजे 'ग्रहांच्या कक्षा रवीकक्षेला ज्या दोन बिंदूत, छेदतात ते बिंदू. सूर्याच्या ऐवजी पृथ्वी हा केंद्रबिंदू मानल्यामुळे ग्रहगणित काहीही फरक पडत नाही हे येथे लक्षात ठेवायला हवे.

ग्रह	**भगण**	**शीघ्रोच्च भगण**	**मंदोच्च भगण**	**पात भगण**
रवि	४,३२०,०००,०००	०	४८०	०
चंद्र	५७,७५३,३००,०००	०	४८८,१०५,८५८	२,३२३,१११,६९८
मंगळ	२,२९६,८२८,५२२	४,३२०,०००,०००	२९२	२६७
बुध	४,३२०,०००,०००	शीघ्रभगण १७,९३६,९९८,९८४	३३२	५२१
गुरु	३६४,२२६,४५५	४,३२०,०००,०००	८५५	६३
शुक्र	४,३२०,०००,०००	शीघ्रभगण ७,०२२,३८९,४९२	६५३	८९३
शनी	१४६,५६७,२९८	४,३२०,०००,०००	४१	५८४

कोष्टकात दिलेल्या एवढ्या प्रचंड मोठ्या संख्या आल्या कुठून? आणि त्या गृहीत धरण्याचे कारण काय? असे दोन प्रश्न आपल्यास समोर तात्काळ उभे रहातील. पाश्चात्य पंडितांनी ज्यावेळी भारतीय खगोलशास्त्राचा अभ्यास सुरु केला त्यावेळी त्यांचेही समोर हे दोन प्रश्न उभे राहिले. हिंदू लोकांनी आपली संस्कृती अती पुरातन आहे हे दाखविण्यासाठीच हा उपद्व्याप केला, असेही तारे काही पंडितांनी तोडले. एका ग्रहाचे भगण निश्चित करायचे असतील तर फार काळजीपूर्वक वर्षानुवर्षे वेध घ्यायला हवेत. उदाहरणार्थ गुरुने रेवती नक्षत्रापासून नक्षत्रचक्राच्या प्रवासाला प्रारंभ केला की पुन्हा त्याच नक्षत्रात यायला त्याला ११.८६ वर्षे म्हणजे सुमारे बारा वर्षे लागतात. शनीसाठी हा काळ २९.६४ किंवा जवळ-जवळ ३० वर्षांचा आहे. अर्थातच एका व्यक्तीला त्याच्या आयुष्यात भगण अचुकपणे निश्चित करणे अशक्य आहे. हे काम पिढ्यान् पिढ्या चालणारे आहे. त्यामुळेच भास्कराचार्यांनी पूर्वाचार्यांनी निश्चित कलेले भगण गृहीत धरले आहेत. तसा उल्लेख त्यांनी आपल्या गणिताध्यायात केला आहे.

आता दुसरा प्रश्न, भगणांसाठी एवढ्या प्रचंड संख्या गृहीत धरण्याचे कारण काय? 'अचुकतेची आवश्यकता' एवढ्या दोनच शब्दात या प्रश्नाचे उत्तर देता येईल. ग्रहांच्या गणितात अचुकता आपण्यासाठीच प्राचीन भारतीय खगोलशास्त्रज्ञांनी भगणांसाठी एवढ्या प्रचंड संख्याचे आयोजन केले. त्यामध्ये भारतीय संस्कृतीची अतीप्राचीनता दाखविण्याचा हेतू नव्हता. त्याकाळी गणनासाठी कोणतेही साधन उपलब्ध नव्हते आणि संख्या लिहिण्यासाठी दशांश चिन्हाचा वापर माहीत झालेला नव्हता. आधुनिक खगोलशास्त्राच्या पुस्तकातही भगणांसारखेच कोष्टक दिले असते. फरक इतकाच की त्यात एका भगणासाठी म्हणजेच एका प्रदक्षिणेसाठी लागणारा काळ दिलेल्या असतो. तर प्राचीन भारतीय खगोलशास्त्रज्ञ एका महायुगात किंवा एका कल्पात किती भ्रमणे म्हणजेच भगण होतात त्यांची संख्या देतात. पृथ्वीच्या नाक्षत्र वर्षाचे मान आहे ३६५.२५६३७४४ दिवस. हीच किंमत आपण ३६५२५६३७४४/१०,०००,००० अशी अपूर्णांकात लिहू शकतो. याचा अर्थ असा की, पृथ्वीच्या दहा लक्ष भ्रमणांसाठी ३६५२५६३७४४ दिवस लागतात, असाही करता येतो. अशा प्रकारे दशांश अपुर्णांकात लिहिलेली १ भगणाची किंमत आणि लक्षावधी भ्रमणांसाठी लागणारे दिवस किंवा वर्षे याचा अर्थ एकच आहे.

विशिष्ट ग्रहाच्या भगणांवरून त्या ग्रहाला एक पृथ्वी प्रदक्षिणा करण्यासाठी किती काळ लागतो हे साध्या त्रैराशिकाच्या साह्याने निश्चित करता येते.

उदाहरणार्थ मंगळाला २२९६८२८५२२ भगणांसाठी ४३२0000000 वर्षे लागतात तर त्याला १ भगणासाठी किती काळ लागेल? याचे उत्तर असे.

मंगळाला एक भगणासाठी लागणारा काळ $= \frac{४,३२०,०००,०००}{२२९६८२८५२२}$ वर्षे.

= १.८८ वर्षे.

= ६८६.९८ दिवस.

बुध आणि शुक्र या दोन ग्रहांना एका भगणासाठी लागणारा काळ निश्चित करण्यासाठी मात्र त्यांच्या शीघ्रोच्चांचा भगण लक्षात घ्यायला हवा. ग्रह दीर्घवर्तुळाकार मार्गने फिरतात हे माहीत नसल्यामुळे सूर्याच्या जवळ असणाऱ्या ह्या दोन ग्रहांसाठी त्यांच्या शिघ्रोच्चांचा भगण घ्यावा लागतो. ग्रह पृथ्वीभोवती कशा प्रकारे भ्रमण करीत असावेत याच्या संकल्पना आपण पुढे पहाणार आहोत.

बुधाच्या शीघ्रोच्चाच्या १७९ ३६९९८९८४ भगणांसाठी ४,३२०,०००,००० वर्षे लागतात तर त्याच्या १ भगणासाठी किती काळ लागेल? याचे उत्तर असे.

बुधाच्या शीघ्रोच्चाच्या एका भगणासाठी लागणारा काळ $= \frac{४,३२०,०००,०००}{१७९३६९९८९८४}$

= ०.२४०८ वर्षे

= ८७.९६७८ दिवस

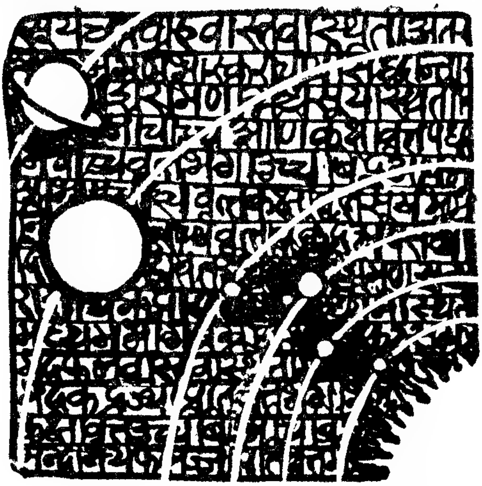
अशा प्रकारे प्रत्येक ग्रहाच्या एका प्रदक्षिणेचा काळ म्हणजेच एका भगणासाठी लागणारा काळ निश्चित करता येईल. भास्कराचार्यांनी निश्चित केलेल्या किंमती आणि आधुनिक किंमती यांचे एक तुलनात्मक कोष्टक पुढे दिले आहे.

	सिद्धांत शिरोमणी				आधुनिक			
ग्रह	दिवस	तास	मिनिटे	सेकंद	दिवस	तास	मिनिटे	सेकंद
सूर्य	३६५	६	१२	९.०	३६५	६	९	१०.८
बुध	८७	२३	१६	४१.५	८७	२३	१५	४३.९
शुक्र	२२४	१६	४५	१.९	२२४	१६	४९	८.०
मंगळ	६८६	२३	५७	१.५	६८६	२३	३०	४१.४
गुरु	४,३३२	५	४५	४३,७	४,३३२	१४	२	८.६
शनी	१०,७६५	१९	३३	५६.५	१०,७५९	५	१६	३२.२

वरील कोष्टकावरून भास्कराचार्यांच्या आणि तसेच पूर्वाचार्यांच्या गणिताची अचुकता पाहून, आपल्याला आश्चर्य वाटल्यावाचून रहाणार नाही. प्राचीन भारतीय खगोलशास्त्रज्ञांव्यतिरिक्त जगातील इतर कोणत्याही संस्कृतीमधील प्राचीन ज्योतिर्विदांनी अशा पध्दतीने ग्रहांच्या भ्रमणाच्या काळ निश्चित केल्याचे आढळत नाही. त्यामुळे भारतीय ज्योतिर्विदांनी ग्रीक किंवा बॅबिलोनियम संस्कृतीमधून खगोलशास्त्राचे ज्ञान उचलले हा पाश्चात्यांचा आरोप खोटा ठरतो. प्राचीन भारतीय खगोलशास्त्र ही निर्विवादपणे भारतीय ज्योतिर्विदांची स्वतःची निर्मिती आहे.

***

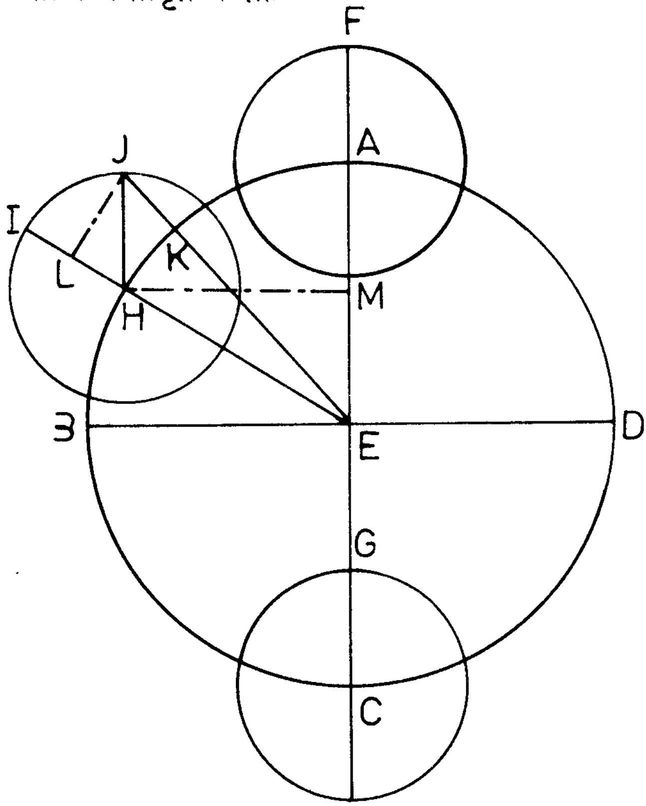
२७



ग्रहांच्या वास्तव स्थिति

सर्व ग्रह सूर्याभोवती दीर्घवर्तुळाकृती कक्षांमध्ये भ्रमण करतात. सतराव्या शतकात होऊन गेलेल्या केपलेरने ही गोष्ट प्रथम सिध्द केली. प्राचीन काळातील पाश्चात्य आणि पौर्वात्य खगोलशास्त्रज्ञांनी मात्र पृथ्वी स्थिर आहे असे कल्पून सूर्य, चंद्र आणि इतर ग्रह तिच्याभोवती वर्तुळाकार कक्षेत भ्रमण करतात असे मानले. पण ग्रहांची गती सर्वत्र समान नाही व पृथ्वीपासून असलेले त्यांचे अंतर बदलते ह्याची त्यांना कल्पना आली होती. एका मध्यम गतीने ग्रह पृथ्वीभोवती भ्रमण करती नाहीत. तसे असते तर ग्रहगणित फार सोपे झाले असते. ग्रहांच्या बदलत्या गतीमुळे मध्यमगतीने निश्चित केलेली ग्रहाची स्थिती व त्याची वास्तव स्थिती यामध्ये अंतर पडते. सूर्य, चंद्र आणि इतर ग्रह यांची वास्तव स्थिती शोधून काढण्यासाठी भारतीयांनी दोन पध्दतींचा अवलंब केला. ह्या दोन्ही पध्दतींचा भास्कराचार्यांनी आपल्या सिध्दांत शिरोमणीत उहापोह केला आहे. सूर्य व चंद्र ह्यांच्या स्थिती निश्चित करण्याचे गणित व ग्रहांच्या स्थिती निश्चित करण्यासचे गणित ह्यामध्ये दोन्ही पध्दतीत थोडा फरक आहे. सूर्य व चंद्र यांचे गणित ग्रहांच्या गणिताच्या तुलनेत पुष्कळच सोपे आहे. सोईसाठी सूर्याची स्थिती निश्चित करण्याच्या पध्दती आपण पहाणार आहोत. ग्रहांच्या गणितासाठी मूळ पध्दती त्याच असल्या तरी त्यात थोडे फेरफार आहेत.

नीचोच्च आणि कक्षावृत्त पध्दतः



पाश्चात्य देशात ही पध्दती एपिसायकल्स आणि डिफरंट या नावाने सुप्रसिध्द आहे. टॉलेमीपासून कोपर्निकस पर्यंतच्या सर्व पाश्चात्य खगोलशास्त्रज्ञांनी ह्याच पध्दतीचा वापर केला होता. पाश्चात्य पध्दती आणि तत्सम भारतीय पध्दत यांचे मध्ये थोडा फरक आहे. भारतीय खगोलशास्त्रात या पध्दतीचे नाव आहे 'नीचोच्चवृत्तभंगी'. ग्रहाचे पृथ्वीपासून असलेले कमीत कमी अंतर ज्या बिंदूपाशी असते त्याला नीचबिंदू आणि जास्तिजास्त अंतर ज्या बिंदूपाशी असते त्याला उच्चबिंदू असे म्हणतात. सूर्याच्या संदर्भात ह्या दोन बिंदूंची नावे आहेत

पेरिहिलीऑन आणि ॲफिहिलीऑन. पृथ्वीच्या संदर्भात त्यांना अपभू आणि उपभू अशी नावे आहेत.

सूर्य किंवा चंद्र विशिष्ट परिघाच्या वर्तुळावर समानगतीने फिरतो या वर्तुळाला एपिसायकल किंवा नीचोच्च वृत्त असे नाव आहे. नीचोच्चवृत्ताचे केंद्र त्याच समानगतीने दुसऱ्या वर्तुळावर फिरते. ह्या वर्तुळाचे भारतीय नाव आहे कक्षावृत्त व पाश्चात्य नाव आहे डिफरन्ट. मात्र नीचोच्च वृत्तावरील सूर्याच्या भ्रमणाची दिशा आणि त्याच्या केंद्राची कक्षावृत्तावर भ्रमण करण्याची दिशा एकमेकांच्या विरुध्द असतात असे मानण्यात आले होते. भारतीयांच्या नीचोच्चवृत्ताचा व्यास सारखा बदलतो नीच किंवा उच्च बिंदूपाशी तो सर्वात जास्त असतो व त्या बिंदूपासून ९० अंशावर नीचोच्च वृत्ताचा व्यास कमीतकमी असतो. पाश्चात्यांच्या एपिसायकलचा व्यास स्थिर असतो. पाश्चात्य व भारतीय पध्दतीमधील हा महत्वाचा फरक आहे. सोबत दर्शविलेल्या आकृतीच्या साह्याने भास्कराचार्यांची म्हणजेच प्राचीन भारतीयांची, ग्रहांचे वास्तवस्थान निश्चित करण्याची पध्दत सहज लक्षात येईल.

ABCD ह्या कक्षावृत्ताचा E हा मध्यबिंदू आहे. E हा बिंदू पृथ्वीचाही केंद्रबिंदू दर्शवितो. AEC ही रेषा उच्च व नीच बिंदू मधून जाते. इंग्रजीत ह्या रेषेसाठी 'ॲप्सिस्' असे नाव आहे. सूर्य, चंद्र आणि ग्रह यांच्या नीचोच्चवृत्ताच्या त्रिज्जा निरनिराळ्या असतात. सूर्याच्या नींचोच्चवृत्ताचे केंद्र A ह्या बिंदूपाशी असताना त्याचा उच्चबिंदू, किंवा मंदोच्च F ह्या अक्षराने दर्शविला आहे. नीचोच्च वृत्ताचे केंद्र मध्यमगतीने कक्षावृत्तावरील A ह्या बिंदूपासून H ह्या बिंदूपर्यंत पोहोचले की नीचोच्चवृत्तावरील सूर्य त्याच गतीने I ह्या उच्चबिंदूपासून J ह्या बिंदूपर्यंत पोहोचतो. अशा प्रकारे नीचोच्चवृत्ताचे केंद्र अपसव्य दिशेत तर सूर्याचे भ्रमण सव्य दिशेत होते.

नीचोच्चवृत्तावर फिरणारा सूर्य व कक्षावृत्तावर फिरणारे त्याचे केंद्र यांच्या गती समान असल्यामुळे ते समान काळात समान कोनांतून अंतर चालतात. त्यामुळे AEH आणि IHJ हे कोन समान असले पाहिजेत. J आणि E हे बिंदू सांधणारी रेषा कक्षावृत्ताला K ह्या बिंदूत छेदते. अर्थात पृथ्वीच्या केंद्रबिंदूच्या संदर्भात सूर्य K या बिंदूपाशी असला पाहिजे. म्हणून K हा बिंदू सूर्याची वास्तव स्थिती दर्शविते. राशीचक्राच्या प्रारंभबिंदूपासून सूर्याच्या मध्यमस्थितीचे अंतर म्हणजेच सूर्याचा मध्यम

भोग, इंग्रजीत त्याला 'मीन लॉन्जिट्यूड' असे नाव आहे. तसेच सूर्याच्या वास्तव स्थितींला 'स्फुट सूर्य' असे भारतीयांचे नाव आहे. ह्याचा अर्थ असा की सूर्याच्या मध्यम भोगाला HK एवढी दुरुस्ती दिली की स्फुटसूर्य मिळेल. ह्या दुरूस्तीलाच 'मंदफल' असे म्हणतात, 'इक्वेशन ऑफ सेंटर' असे त्याचं इंग्रजी नाव आहे. प्रथम सूर्याची मध्यम स्थिती काढायची व नंतर 'मंदफल' देऊन त्याची वास्तव स्थिती निश्चित करायची या क्रियेला 'मंदकर्म' असे नाव आहे. आकृतीमधील HEA ह्या कोनाला 'मंदकेंद्र' असे नाव आहे. त्यालाच इंग्रजीत 'मीन ॲनॉमली' असे म्हणतात. EA ह्या रेषेवर HM हा लंब टाकला की भारतीयांची 'मंदक्रेंद्रज्या' मिळते. तसेच EI ह्या रेषेवर JL हा लंब टाकला की मंदफलाची किंमत काढता येते, कारण सूर्य आणि चंद्र यांच्यासाठी JL आणि HK ह्या जवळ-जवळ सारख्याच लांबीच्या रेषा मानल्या जातात त्यामुळे JL ची किंमत काढली की आपोआप HK ह्या मंदफलाची किंमत मिळते. इतर ग्रहांचे गणित त्यापेक्षा थोडे अवघड आहे. ग्रहांसाठी दोन वेगवेगळी नीचोच्चवृत्ते गृहीत धरण्यात येतात. त्यावरून मंदफल, शीघ्रफल काढली जतात आणि इतर काही नियम लावून ग्रहाची वास्तव स्थिती निश्चित केली जाते.

कक्षावृत्त प्रतिवृत्त पध्दतः

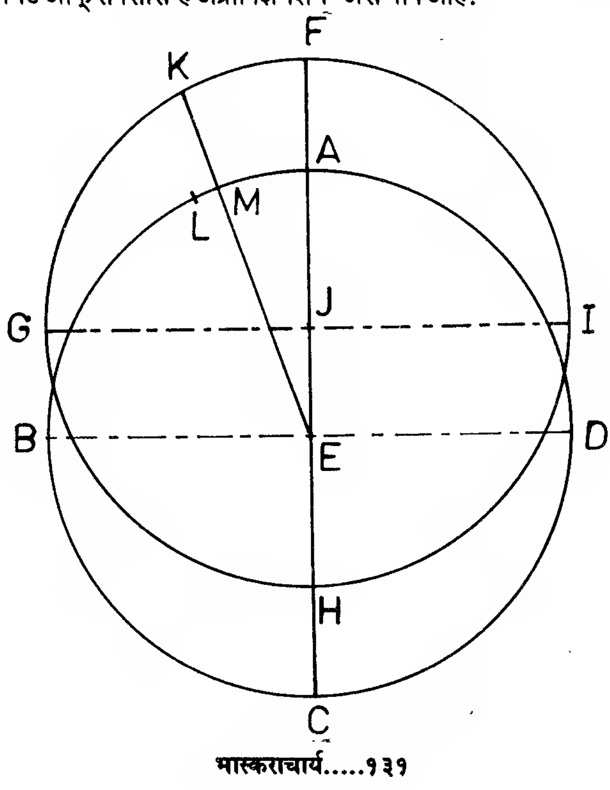
ह्या पध्दतीचे भारतीय नाव आहे 'प्रतीवृत्त भंगी'. त्यामध्ये सूर्य किंवा चंद्र मध्यमगतीने कक्षावृत्तावर फिरतात असे मानण्यात येते. वास्तव सूर्य किंवा चंद्र, त्याच गतीने, त्याच दिशेत आणि तेवढ्याच व्यासाच्या दुसऱ्या एका वर्तुळावर भ्रमण करतात अशी कल्पना केली जाते. ह्या नव्या वृत्ताला प्रतिवृत्त असे म्हणतात. कक्षावृत्त आणि प्रतिवृत्त यांची इंग्रजी नाव अनुक्रमे 'कॉन्सेन्ट्रिक' आणि 'एक्सेन्ट्रिक' अशी आहेत. कक्षावृत्ताचा मध्यबिंदू पृथ्वीचा केंदबिंदू असतो, तर प्रतिवृत्ताचे केंद्र उच्चबिंदू, नीचबिंदू आणि पृथ्वीकेंद्र यांना जोडणाऱ्या रेषेवर, पृथ्वीकेंद्रा पासून थोडया अंतरावर असते. ह्या अंतराला 'मन्दात्य फलज्या' असे म्हणतात. सोबतच्या आकृतीवरून या सर्व संकल्पना स्पष्ट होतील.

आकृतीमधील ABCD हे सूर्याचे कक्षावृत्त आहे. पृथ्वीचे E हे केंद्र ह्या वृत्ताचा मध्यबिंदू आहे. AC ही रेषा उच्चबिंदू, नीचबिंदू व पृथ्वीकेंद्र ह्या तीन बिंदूमधून जाते. त्यावरील A हा नीच तर C हा उच्चबिंदू आहे. EJ हे अंतर सूर्याच्या नीचोच्च वृत्ताच्या त्रिज्जेएवढे मोजून घेतले आणि J हा मध्यबिंदू घेऊन कक्षावृत्ता एवढ्याच व्यासाचे FGHI हे वर्तुळ काढले. हे वर्तुळ सूर्याचे प्रतिवृत्त दर्शविते.

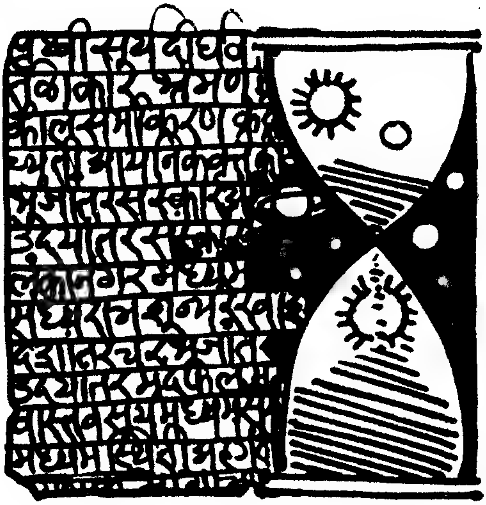
मध्यमसूर्य आणि वास्तव सूर्य एकाच वेळी अनुक्रमे A आणि F ह्या बिंदूपासून निघाले व

कक्षावृत्त आणि प्रतिवृत्त या वर्तुळांवरून एकाच गतीने व एकाच दिशेत प्रवास करू लागते की काही काळाने अनुक्रमे L आणि K ह्या बिंदूपाशी पोहोचतील K आणि E हे बिंदू सांधले तर KE ही रेषा कक्षावृत्ताला M ह्या बिंदूत छेदील. हीच सूर्याची वास्तव स्थिती असेल, कारण पृथ्वीकेंद्रावरून पहाताना सूर्य EK ह्या रेषेत दिसेल. L हा बिंदू सूर्याची मध्यम स्थिती दर्शवील. अर्थातच सूर्याच्या मध्यम भोगाला LM एवढी दुरुस्ती लावली की सूर्याची वास्तव स्थिती मिळेल. ह्या पध्दतीत LM ह्या रेषेला 'मंदफल' असे म्हणतात.

दोन्ही पध्दतीमधील कक्षावृत्त-प्रतिवृत्त पध्दती भास्कराचार्यांना जास्त संयुक्तिक वाटते. दोन्ही पध्दती वापरून एकच उत्तर मिळेल असेही त्यांनी लिहिले आहे. त्रिकोणमितीचा उपयोग करून मंदफलाची किंमत सहज काढता येईल. परंतु एवढ्या साध्या गणिताने विशेषतः ग्रहांच्या वास्तव स्थितीचा प्रश्न सुटणार नाही हे भारतीय खगोलशास्त्रज्ञांना माहीत होते. त्यासाठी त्यांनी अनुक्रमाने अंदाज करीत ग्रहांची वास्तव स्थिती निश्चित केली. ह्या पध्दतीला मेथड ऑफ् सक्सेसिव्ह ॲप्रॉक्झिमेशन' असे नाव आहे.



२८



भुजांतर आणि उदयांतर

पृथ्वी सूर्याभोवती दीर्घवर्तुळाकार मार्गाने भ्रमण करते. त्यामुळे तिची गती सर्वत्र सारखी नसते. उलट अर्थाने, पृथ्वी स्थिर आहे असे मानले तर, सूर्य पृथ्वीभोवती समान गतीने भ्रमण करीत नाही. आयनिक वृत्तावर भ्रमण करणाऱ्या सूर्याची गती कधी कमी तर कधी जास्त असते. अर्थातच कालमापनासाठी बदलत्या गतीचा वास्तव सूर्य उपयोगाचा नाही. त्याच्याप्रमाणे आपली घड्याळे लावून चालणार नाहीत. शास्त्रज्ञांनी ह्या प्रश्नातून मार्ग काढण्यासाठी समान वेळात समान अंतर कापणारा म्हणजेच समान गती असणारा आणि विषुववृत्तावरून पृथ्वी भोवती भ्रमण करणारा सूर्य गृहीत धरला. आपली घड्याळे ह्याच मानीव सूर्यावरून लावलेली असताता. त्याचाच कालमापनासाठी संदर्भ म्हणून उपयोग केला जातो.

मानीव सूर्य समान गतीने भ्रमण करीत असल्यामुळे वास्तव सूर्याच्या संदर्भात तो कधी जास्त गतिमान तर कधी कमी गतिमान असतो. वसंत आणि शरद संपात दिनांच्या दिवशी मात्र हे दोन सूर्य एकत्र असतात. नंतर त्यांच्यामधील काळात फरक पडत जातो. वास्तव आणि मानीव सूर्य यांच्या काळामधील फरकालाच 'इक्वेशन ऑफ टाइम' असे नाव आहे. मराठीत त्यासाठी कालसमीकरण असा शब्द वापरायला हरकत नाही. कालसमीकरणाची अधीकतम किंमत १६ मिनिटे असू

शकते. कालसमीकरणाचे दोन भाग आहेत एक (सूर्याच्या) पृथ्वीच्या केंद्रत्युतीमुळे निर्माण होतो आणि दुसरा आयनिक वृत्ताच्या विषुववृत्ता बरोबर असणाऱ्या कोनामुळे निर्माण होतो.

कालसमीकरणाच्या दोन्ही भागांचा विचार भास्कराचार्यांनी केला आहे. त्यासाठी त्यांनी भुजांतर आणि उदयांतर असे दोन संस्कार सुचविले आहेत. केंद्रच्युतीमुळे निर्माण होणारे कालांतर भुजांतर संस्काराने आणि आयनिक वृत्ताच्या तिरकेपणामुळे निर्माण होणारे कालांतर उदयांतर संस्कारामुळे निश्चित करता येते. भास्कराचार्यांच्या पूर्वीच्या आचार्यांना भुजान्तराची कल्पना होती पण उदयांतर संस्कार त्यांच्या लक्षात झाला नव्हता. तो प्रथम भास्कराचार्यांच्या लक्षात आला. भारतीय खगोलशास्त्राताला भास्कराचार्यांची ही महत्वाची देणगी आहे. पूर्वीच्या आचार्यांनी ह्या महत्वाच्या संस्काराची उपेक्षा का केली, यावर तो अत्यंत अल्प आहे म्हणून' असे भास्कराचार्यांचे उतर आहे.

भास्कराचार्यांच्या आधी श्रीपती नावाचा खगोलशास्त्रज्ञ इसवी सन १०२५ च्या सुमाराला होऊन गेला त्याने प्रथम भुजांतर आणि उदयांतर संस्कारांचे सूतोवाच केले होते, पण भास्कराचार्यांनी त्यांचे संपूर्ण गणिती विवरण दिले. भास्कराचार्यांनंतर किमात ५०० वर्षे अशा संस्कारांची पाश्चात्य खगोलशास्त्रज्ञांनाही कल्पना नव्हती. ग्रीनविच वेध शाळा स्थापन झाल्यानंतर तेथे पहिला 'ॲस्ट्रॉनॉमर रॉयल' म्हणून फ्लॅमस्टीडची नेमणूक झाली त्याने इसवी सन १७०० च्या सुमाराला कालसमीकरणाचे विश्लेषण केले

ग्रहाची गणिताने सिध्द केलेली मध्यम स्थिती, लंकेच्या म्हणजेच विषुववृत्ताच्या मध्यम मध्यरात्रीसाठी असते. भारतीयांच्या दृष्टीने लंकानगर विषुववृत्त आणि शून्य रेखांश ह्यांच्या छेदन बिंदूवर विषुववृत्तावर आहे. भारतीयांचे शून्य रेखांश लंका, उजैन, कुरुक्षेत्र आणि उत्तरध्रूव ह्या बिंदूंमधून जाते. कोणत्याही ठिकाणी वास्तव मध्यरात्रीसाठी ग्रहाची स्थिती निश्चित करायची असेल तर देशांतर, चर, भुजांतर आणि उदयांतर असे चार संस्कार केले पाहिजेत. देशांतर संस्कार रेखांशाच्या फरकामुळे तर चर संस्कार अक्षांशाच्या फरकामुळे करावा लागतो. भुजांतर आणि उदयांतर संस्काराची कारणे आधी दिलीच आहेत.

आयनिक वृत्ताच्या प्रत्येक ३० अंशाच्या भागाला आपण राशी असे नाव दिले

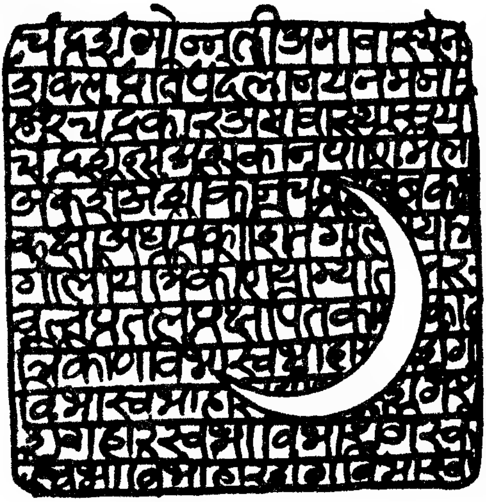
आहे. आयनिक वृत्त विषुववृत्ताशी सुमारे २३.५ अंशाचा कोन करीत असल्यामुळे प्रत्येक राशीच्या विषुववृत्तावरील उदयाला कमी जास्त वेळ लागतो. सूर्याची वास्तव स्थिती निश्चित करण्यासाठी त्याचे मंदफल म्हणजेच 'इक्वेशन ऑफ सेंटर' काढावे लागते. मंदफलाची किंमत धन असेल तर वास्तव सूर्य मध्यम सूर्याच्या पुढे असतो. आणि दिलेल्या स्थानी वास्तव मध्यरात्र मध्यम मध्यरात्रीच्या नंतर होते. ह्या काळात ग्रह पुढे सरकलेला असतो त्यामुळे संस्काराची किंमत धन होते. सोप्या त्रैराशिकाने भुजांतर संस्काराची किंमत निश्चित करता येते.

ग्रहाची मध्यम स्थिती काढण्यासाठी अहर्गणाचा उपयोग केला जातो, अहर्गण म्हणजे भूतकाळातील एका विशिष्ट क्षणापासून मोजलेले दिवस. परंतू हे अहर्गण मध्यम सूर्याच्या संबंधात मोजण्यात येतात. वस्तुतः ते वास्तव सूर्याच्या संदर्भात मोजायला हवेत. त्यामुळेच ग्रहाचे वास्तव स्थान ठरविण्यात चूक होते ती उदयांतर संस्कारामुळे दूर केली पाहिजे. वास्तव सूर्याचा भोग आणि मध्यम सूर्याचे विषुवांश ह्यांचा फरकावरून अहर्गणांमधील फरक काढतो येतो. भास्कराचार्यांचा उदयांतर संस्कार म्हणजे मध्यम सूर्याचा भोग (लॉन्जिट्यूड) आणि त्याचे विषुवांश (राइट ॲसेन्शन) यामधील फरक.

उदयांतर निश्चित करण्यासाठी थोडया गणिताची आवश्यकता आहे. भास्कराचार्यांनी असे सिध्द केले आहे की उदयांतराची उच्चतम किंमत १०.३ मिनिटे असते. चंद्रासाठी उदयांतरामुळे होणारा संस्कार ५ मिनिटे ५१ सेकंदाचा आहे. भास्कराचार्यांच्या बुध्दिमत्तेच्या सूक्ष्मतेची आणि प्रगल्भपणाची साक्ष त्यांच्या उदयांतर संस्कारामुळे आपल्याला प्रकर्षाने जाणवते.

***

२९

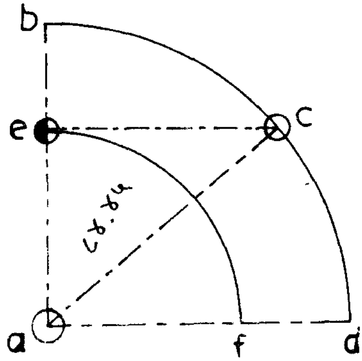


चंद्रशृंगोन्नती

अमावास्येनंतर दुसऱ्या दिवशी म्हणजे शुक्ल प्रतिपदेला चंद्राची नयनमोहन कोर काही काळ आकाशात दिसते आणि नंतर थोड्यावेळाने अस्ताला जाते. त्या दिवशी चंद्राची कोर नीट निरखून पाहिलीत तर तिला जणूकाही दोन टोकदार शिंगे आहेत असा भास होतो. त्यापैकी एक शिंग दुसऱ्यापेक्षा उत्तरेच्या किंवा दक्षिणेच्या बाजूने वर उचलते दिसते हीच ती भारतीयांची चंद्रशृंगोन्नती. वस्तुतः चंद्राच्या ह्या विशिष्ट स्थितीचा कोणताही धार्मिक संदर्भ नाही तरी सुध्दा भारतीय पंचांगांमध्ये निरनिराळ्या महिन्यांमधील चंद्रशृंगोन्नतीच्या आकृत्या दिलेल्या असतात. चंद्रशृंगोन्नतीचे गणित भास्कराचार्यांनी सुलभतेने हाताळले आहे. त्यांची गणिती पध्दत इथे देणे शक्य नसले तरी त्यांची काही संकल्पना स्पष्ट करणे योग्य ठरेल.

अमावास्येच्या दिवशी चंद्र व सूर्य पृथ्वीच्या संदर्भात एकाच बाजूला आणि जवळ-जवळ एकाच रेषेत असतात आणि पौर्णिमेला ते परस्परांच्या विरुध्द दिशेला असतात. म्हणजेच अमावास्येला चंद्र व सूर्य यांचमधील कोन जवळ-जवळ शून्य असतो तर पौर्णिमेला तो १८० अंश असतो. ह्या दोन दिवसांपासून ९० अंशावर म्हणजे शुक्ल किंवा कृष्ण अष्टमीला चंद्र बिंब अर्धे दिसते असे आपण म्हणतो पण आपली ही कल्पना भास्कराचार्य खोडून काढताता. चंद्र व सूर्य पृथ्वीशी ज्यावेळी

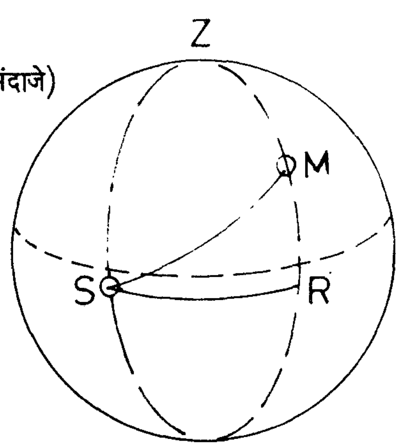
८४ अंश ४५ सेकंदाचा कोन करतात त्यावेळी चंद्राचे बिंब बरोबर अर्धे दिसते असे भास्कराचार्य लिहितात. भास्कराचार्यांच्या ह्या विधानाचे स्पष्टीकरण पुढे दिलेल्या आकृतीच्या साह्याने करता येईल.



आकृतीमध्ये पृथ्वीची स्थिती A ह्या अक्षराने आणि सूर्य व चंद्र यांच्या कक्षा अनुक्रमे BCD आणि EF ह्या अक्षरांनी दर्शविल्या आहेत. प्रस्तुत आकृतीवरून आपल्या असे लक्षात येईल की सूर्य C ह्या बिंदू पाशी असताना E येथे असलेल्या चंद्राच्या बरोबर अर्धाभाग प्रकाशित होईल. सूर्य D ह्या बिंदूपाशी पोहोचला की चंद्राचा अर्ध्यापेक्षा जास्त भाग प्रकाशित झालेला असेल. चंद्राचा बरोबर अर्धाभाग प्रकाशित झाला असताना चंद्र पृथ्वी व सूर्य यांचेमधील कोन सहज निश्चित करता येईल, तो ९० अंशापेक्षा लहान आहे. भास्कराचार्यांनी पृथ्वी व चंद्र यामधील अंतर ५१५६६ योजने व पृथ्वी व सूर्य ह्यामधील अंतर ६८९३७७ योजने गृहीत धरले आहे. आकृतीवरून

$$\text{COS EAC} = \frac{AE}{AC} = \frac{51566}{689377} = .0748$$

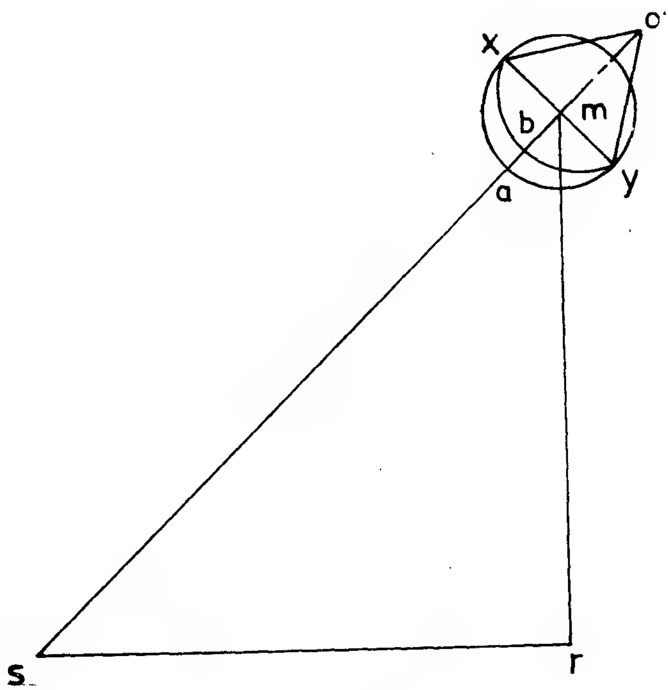
∴ कोन EAC = ८५° ४५ मिनिटे (अंदाजे)



चंद्रशृंगोन्नतीचा विचार करताना आपल्याला एक गोलीय त्रिकोण लक्षात घ्यावा लागतो. सोबतच्या आकृतीत तो SRM ह्या अक्षरांनी दर्शविला आहे. त्यामध्ये S हे अक्षर सूर्याची स्थिती दर्शविते. सूर्य क्षितिजाच्या थोडा खाली आहे. M हे अक्षर क्षितिजाच्या वर असलेल्या चंद्राची स्थिती दर्शविते.

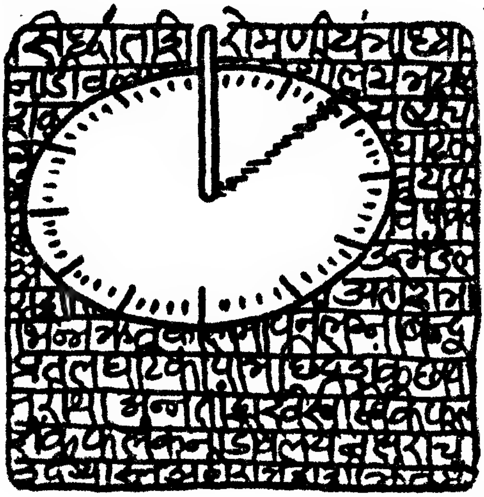
SRM हा गोलीय त्रिकोण याम्योत्तर वृत्ताच्या प्रतलात प्रक्षेपित केला की तो s r m ह्या काटकोन त्रिकोणाप्रमाणे दिसेल. त्यामध्ये m हा केंद्रबिंदू होऊन ६ एकक त्रिज्जेचे एक वर्तुळ रेखाटले आहेत ते चंद्रबिंब दर्शविते.

S r M ह्या त्रिकोणाच्या बाजू गणिती सूत्रांच्या साह्याने निश्चित करता येतात. सूर्यावरून येणारे किरण चंद्राचा जो भाग प्रकाशित करतील तो xay आणि xby ह्या दोन चापांच्या मध्ये असेल त्यापैकी xay ह्या चापाची त्रिज्या चंद्रबिंब एवढीच आहे आणि xby ह्या चापाची त्रिज्जा गणिताने निश्चित करता येते. ह्या चापाचे केंद्र O ह्या अक्षराने दर्शविले आहे. आकृतीमधील om ह्या रेषेला भास्कराचार्यांनी 'विभा' असे नाव दिले आहे तर ox किंवा oy हया रेषेला ते 'स्वभा' असे म्हणतात. mb ह्या रेषेला ते हार असे नाव देतात. आकृतीमधील abx हे शृंग aby ह्या शृंगाच्या वर उचलेले आहे.



***

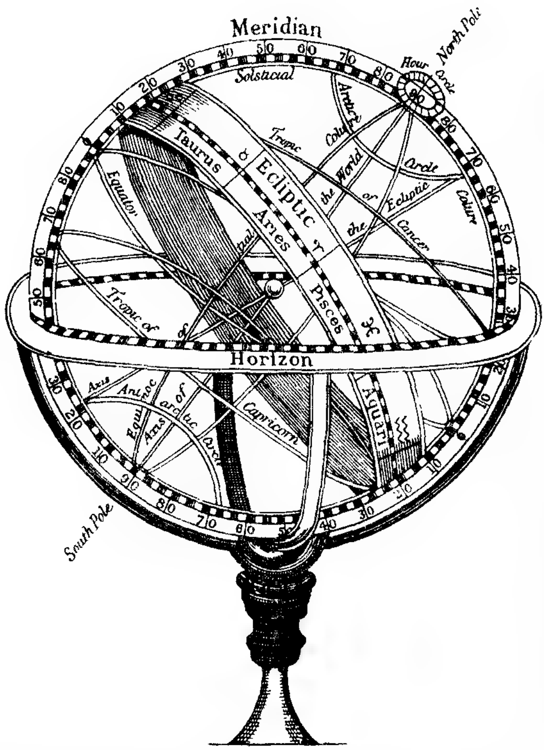
३०



यंत्राध्याय

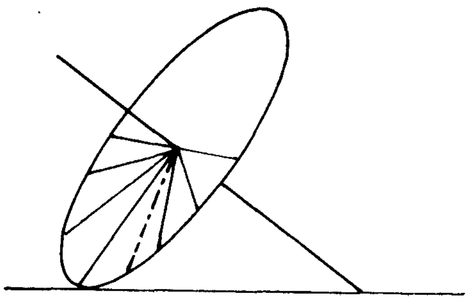
प्राचीन काळी वेधांची साधने अगदीच सामान्य स्वरूपाची होती. त्यांची नावे तुरियायंत्र, गोलयंत्र, यंत्रराज वगैरे आकर्षक असली तरी त्यांचेमध्ये अचुकतेचे प्रमाण फारच कमी होते. तरीही आकाश निरीक्षणासाठी साधी-साधी यंत्रे शोधून प्राचीन भारतीयांनी आपल्या कल्पकतेचा आविष्कार दर्शविला आहे यात शंकाच नाही. त्या काळात प्रत्यक्ष वेध आणि गणिताने आणलेली ग्रहांची स्थिती ह्यामध्ये थोडाफार फरक पडत असला तरी तो क्षम्यच म्हणावा लागेल. भास्कराचार्यांनी सिध्दांतशिरोमणीमध्ये यंत्राध्याय नावाचे एक खास प्रकरण समाविष्ट केले आहे. आकाश निरीक्षणासाठी लागणाऱ्या ९ यंत्रांचे त्यामध्ये वर्णन आहे. गोलयंत्र, नाडीवलय, यष्टी, शंकू, घटिका, चक्र, चाप, तूर्य आणि फलक अशी ह्या यंत्रांची नावे आहेत. भास्कराचार्यांच्या ह्या यंत्रांची जुजबी माहिती आपल्याला असायला हरकत नाही. विशेषतः हौशी खगोलशास्त्रज्ञ ह्यापैकी काही यंत्रे स्वतः बनवून आकाश निरीक्षण करू शकतील.

१) **गोलयंत्र :** भास्कराचार्यांचे गोलयंत्र म्हणजे आधुनिक काळातील आर्मिलरी स्फिअर' त्यांनी ह्या विषयावर गोलबन्धाधिकार नावाचे एक स्वतंत्र प्रकरण लिहिले आहे. भास्कराचार्यांचे गोलयंत्र पुष्कळच गुंतागुंतीचे आहे. त्यामध्ये वैषुविकवृत्त, आयनिक वृत्त, उन्मंडल, अहोरात्रवृत्ते या आणि अशा सर्व वृत्तांचा समावेश आहे. अर्थात् प्रत्यक्ष वेधासाठी गोलयंत्राचा फारसा उपयोग होत



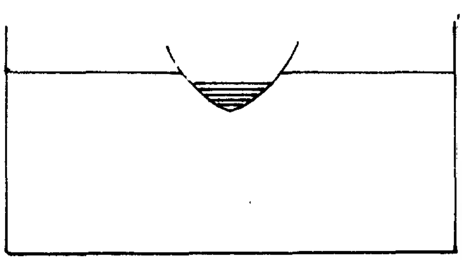
नसावा. शिक्षणाचे एक साधन म्हणून ते वापरले जात असावे. वृत्ते, राशी, नक्षत्रांचे उदयास्त, सूर्याचे भिन्न ऋतूंमधील उदयास्त, विविध अक्षांवरून आकाश दर्शन वगैरे गोष्टी विद्यार्थ्यांना समजून देण्यासाठी गोलयंत्राची निर्मिती करण्यात येत असावी. सूर्योदयानंतरचा गतकाल आणि जन्म पत्रिकेसाठी लागणारा लग्नबिंदू म्हणजेच आयनिक वृत्ताचा पूर्वक्षतिजावर असणारा बिंदू शोधण्यासाठी गोलयंत्राचा वापर होत असावा असे भास्कराचार्यांच्या लिखाणावरून दिसते. गोलयंत्र कशा प्रकारचे असते ह्याची कल्पना येण्यासाठी एका आधुनिक गोलयंत्राची आकृती सोबत दिली आहे. भास्कराचार्यांचे गोलयंत्र त्यापेक्षा पुष्कळच गुंतागुंतीचे आहे.

२) नाडीवलय : भास्करराचार्यांचे नाडिवलय म्हणजे आधुनिक 'इक्वेटोरियल सन् डायल' किंवा साध्या मराठीत सूर्य घड्याळ. एका वर्तुळाकृती तबकडीवर ६० घटिकांचे आकडे कोरून तिच्या केंद्रभागी एक सरळ, दंडगोलाकृती, पुरेशा लांबीची काठी रोवली की नाडीयंत्र तयार होते. काठीचे टोक बरोबर उत्तर ध्रुवाकडे, म्हणजेच तबकडीचा प्रतल वैषुविक वृत्ताशी समांतर राहील अशा प्रकाराने नाडीवलय ठेवण्यात येते. सूर्योदयापासून सूर्यास्तापर्यंत काठीची तबकडीवरील सावली पश्चिमेकडून



पूर्वेकडे सरकते. ह्या सावलीच्या स्थितीवरून स्थानिक वेळ निश्चित करता येते. वेळेची अचुकता साधण्यासाठी त्याला कालसमीकरणाचा म्हणजेच 'इक्वशन ऑफ टाइम'चा संस्कार करावा लागतो. भास्कराचार्यांनी नाडिवलयामध्ये राशीही दर्शवायला सांगितल्या आहेत. प्रत्येक राशीला स्थानिक अक्षांशावर उगवण्यासाठी जेवढा काळ लागतो, त्याप्रमाणात राशींसाठी घड्याळाचे भाग पाडावेत असे त्यानी सुचविले आहे. सूर्य कोणत्या राशीत आहे, किती वाजले आहेत, लग्नबिंदू कोणता आहे, वगैरे अनेक गोष्टी निश्चित करण्यासाठी नाडिवलयाचा उपयोग करीत असतात. भास्कराचार्यांच्या नाडिवलयाचे कल्पनाचित्र सोबत दिले आहे.

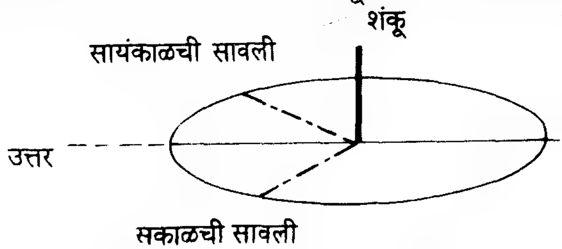
३) घटिकायंत्र: अगदी अलिकडच्या काळापर्यंत घटिकायंत्र वापरात होते. विशेषतः लग्नाचा मुहूर्त साधण्यासाठी घटिकायंत्राचा हमखास उपयोग केला जात



असे. घटिकापात्र केवढे असावे त्याचे आकारमान भास्कराचार्यांनी दिले आहे. घटिकापात्राच्या तळाशी एक छिद्र पाडण्यात येते, आणि नंतर ते पाण्याने भरलेल्या मोठ्या भांड्यात ठेवले जाते. प्रारंभी घटिकापात्र पाण्यावर तरंगते. पण जसजसे छिद्रावाटे त्यात पाणी शिरू लागते तसतसे ते जड होत जाते व सरतेशेवटी पाण्यात बुडते. अर्थात् घटिकापात्राच्या तळाशी पाडलेले छिद्र इतके लहान असायला हवे की ते बरोबर एक घटकेने पाण्यात बुडले पाहिजे. त्यामुळे काल सातत्य रहाण्यासाठी दोन घडिकापात्रे आवश्यक आहेत. एक पात्र बुडत असतानाच दुसरे पात्र पाण्यात ठेवणे आवश्यक

आहे. कालमापनाची ही पध्दत अवघडच आहे. घटिकापात्र कसे असते ह्याची कल्पना सोबतच्या आकृतीवरून येऊ शकेल.

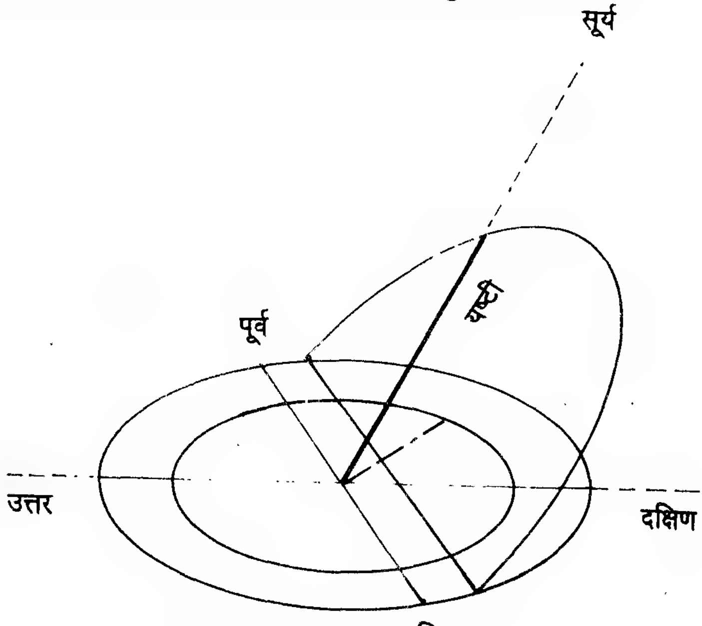
४) शंकू : प्राचीन भारतीयांचे सर्वात आवडते यंत्र असे शंकूयंत्राचे वर्णन करता येईल. सूर्यसिध्दांतामधील एक प्रकरण शंकूयंत्रासाठीच वाहिलेले आहे. भास्कराचार्यांनीही ठायी ठायी शंकूयंत्राच्या सावलीचा उपयोग करून घेतला आहे. अत्यंत साधे व अतीशय बहुगुणी असे हे यंत्र आहे. शंकू १२ अंगुळे उंच, दंडगोलाकृती व हस्तिदंताचा करावा असे भास्कराचार्य सुचवितात.



शंकूच्या विविध प्रकारच्या सावल्यांवरून अनेक खगोलशास्त्रीय गोष्टींचे ज्ञान होते. विशेषतः उत्तर दक्षिण दिशांची निश्चिती शंकूच्या सावलीवरुन अचुकपणे करता येते. त्यासाठी सपाट जमिनीवर एक वर्तुळ आखून त्याच्या केंद्रभागी शंकू ठेवण्यात येतो. मध्यान्हिच्या आधी व नंतर शंकूची सावली वर्तुळाच्या केंद्राशी जोडून टाकली की एक कोन मिळतो. ह्या विशिष्ट कोनाचा दुभाजक म्हणजेच दक्षिणोत्तर रेषा. वसंत व शरद संपात दिनी १२ अंगुळ उंचीच्या शंकूची बरोबर १२ वाजता मोजलेली सावली म्हणजेच पलभा. भारतीय खगोलशास्त्रातील अनेक गणितात ह्या पलभेचा अतीशय उपयोग होतो. स्थानिक अक्षांश व वेळ ठरविण्यासाठीही शंकूयंत्राचा उपयोग करता येतो. दक्षिणोत्तर रेषा निश्चित करण्यासाठी शंकूचा कसा उपयोग करीत ते सोबतच्या आकृतीत दाखविले आहे.

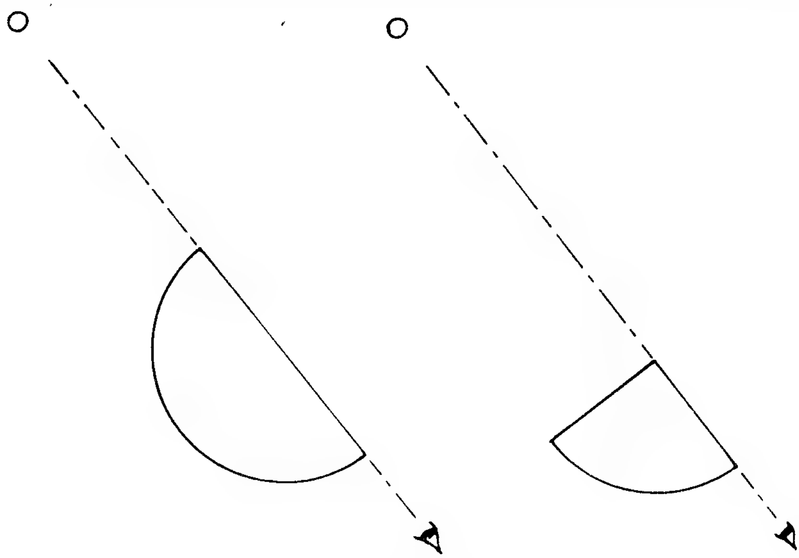
५) यष्टीयंत्र : सपाट पृष्ठावर एक वर्तुळ काढावे त्याची त्रिज्जा गोलाच्या प्रमाणात म्हणजेच ३४३८ ह्या त्रिज्जेच्या प्रमाणात घ्यावी. प्रथम शंकूच्या साह्याने ह्या वर्तुळाचे दक्षिणोत्तर व पूर्व पश्चिम बिंदू निश्चित करावेत. व ते बिंदू जोडणाऱ्या रेषा आखून घ्याव्यात. ज्या दिवशी कालमापन करायचे असेल त्या दिवशी सूर्याची अग्रा गणिताने निश्चित करावी. व वर्तुळावरील पूर्व आणि पश्चिम बिंदूपासून

उत्तरेला किंवा दक्षिणेला तेवढ्या आकाराचे चाप वर्तुळावर काढून घ्यावेत. जे दोन बिंदू मिळतील ते सूर्याच्या उदयास्ताच्या स्थिती दर्शवतील. त्यानंतर मूळ वर्तुळाच्या आत, तेच केंद्र घेऊन आणखी एक वर्तुळ रेखाटावे. ह्या वर्तुळाची त्रिज्जा त्या दिवशीच्या अहोरात्र वृत्ताच्या म्हणजेच ड्युरनल सर्कलच्या प्रमाणात घ्यावी. हे आतील वर्तुळ साठ समान भागात विभागावे. ज्या दिवशी कालमापन करायचे असेल त्या दिवशी बाहेरील वुर्तळाच्या त्रिज्जेएवढी लांब असलेली एक सरळ यष्टी निवडून तिचे एक टोक वर्तुळाच्या मध्यावर ठेवावे व दुसरे टोक सूर्याच्या दिशेत अशाप्रकारे ठेवावे की यष्टीची सावली पडू नये. ज्या क्षणी हे साध्य होईल त्या क्षणी यष्टीचे टोक आकाशातील सूर्याची स्थिती दर्शवील. यष्टीच्या आकाशाकडील टोकापासून पूर्व किंवा पश्चिमेकडील अग्राबिंदू पर्यंतचे अंतर मोजके की जी जीवा मिळेल त्यावरून चाप काढता येईल. हा चाप सूर्योदया पासून मापनाच्या क्षणापर्यंत सूर्याने किती अंतर आक्रमण केले ते दर्शवील. सरतेशेवटी त्याच चापा एवढा चाप आतील वर्तुळावर मोजून घ्यावा. त्यावरून सूर्योदयापासून मापनाच्या क्षणापर्यंत किती घटिका उलटल्या ते समजेल. यष्टीयंत्राची संकल्पना सोबतच्या आकृतीत दाखविली आहे.



६) चंक्रयंत्र : चापयंत्र : तुरिया :

चक्र, चाप व तुरिया ही तीनही यंत्रे वस्तुतः एकाच प्रकारची आहेत. चक्रयंत्रासाठी पूर्णवर्तुळाकृती, चापयंत्रासाठी अर्धवर्तुळाकृती व तुरियासाठी एक चतुर्थांश आकाराची तबकडी वापरत असत. ह्या तीनही यंत्रांचे मूलतत्व एकच



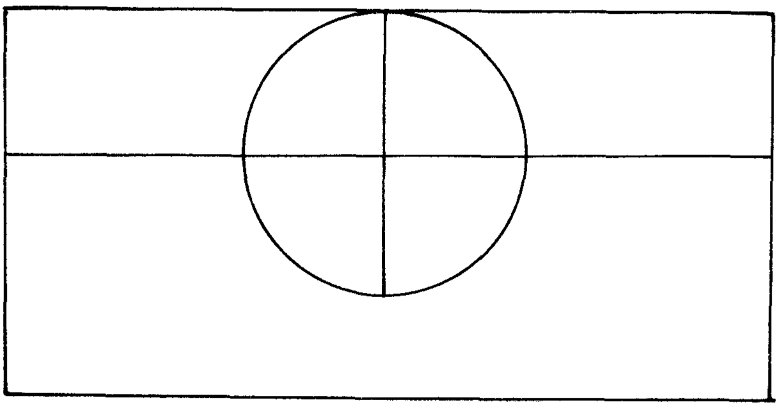
आहे. त्यामुळे चक्रयंत्राचे वर्णन चाप व तुरिया ह्यांनाही लागू पडते.

चक्रयंत्राच्या साह्याने सूर्याचे उन्नतांश व खस्वस्तिका पासून असलेले त्याचे अंतर निश्चित करता येते. वर्तुळाकृती आकाराच्या तबकडीवर ३६० अंक कोरून, तिच्या केंद्रबिंदूपाशी एक सरळ पण छोट्या आकाराची काठी बसवावी. चक्राची क्षैतिज रेषा व तळाचा बिंदू निश्चित करून त्याप्रमाणे ते एका दोऱ्याला बांधावे. चक्रयंत्राचा ज्यावेळी उपयोग करायचा असेल त्यावेळी त्याचे प्रतल सूर्याच्या दिशेत अशाप्रकारे धरावे की काठीची सावली, चक्राच्या परिघाजवळ असलेल्या अंशांच्या मापनावर पडावी. परिघाच्या ज्या बिंदूला सावली स्पर्श करील, त्याचे क्षैतिज आणि त्याच्याशी लंबरूप असलेल्या रेषांपासून अंतर मोजावे. ह्या दोन अंतरावरून सूर्याचे उन्नतांश व त्याचे खस्वस्तिकापासून असलेले अंतर निश्चित करता येते.

चक्रयंत्रासाठी अर्ध किंवा एक चतुर्थांश वर्तुळ वापरले तरी सूर्याचे उन्नतांश व त्याचे खस्वास्तिकापासून असलेले अंतर काढता येईल निरीक्षणाची पध्दत तीच राहील. चक्र अर्धे असेल तर त्याला चापयंत्र व एक चतुर्थाश असेल तर तुरिया असे म्हणण्याची प्रथा आहे.

७) फलक यंत्रः

हे अवाढव्य यंत्र भास्कराचार्यांनी पुष्कळ विचार करून प्रयत्नपूर्वक बनविलेले दिसते. फलकयंत्रामागे बऱ्याच खगोलशास्त्रीय आणि गणिती संकल्पना असल्यामुळे



ह्या यंत्राची जुजबी माहितीच आपल्याला करून घेता येईल. भास्कराचार्यांना अतीशय प्रीय असलेले हे यंत्र असावे ते लिहितात. 'ऊर्ध्वदिशेत असलेल्या चक्राच्या साह्याने उन्नतांश मोजून कालनिश्चिती करण्याची क्रिया कित्येक जण सहजपणे करू शकत नाहीत म्हणून मी स्वतः कष्ट घेऊन आणि प्रयत्न करून फलक यंत्र नावाचे एक नवीन यंत्र शोधून काढले आहे. गोलाच्या मूलतत्वांवर आधारित असलेली सर्व गणिते हे यंत्र सम्यक प्रकारे दर्शविते मी भास्कर आता ह्या अत्यंत उत्कृष्ट यंत्राचे वर्णन करतो. हे यंत्र अज्ञानाचा अंधःकार दूर करील आणि हुषार खगोलशास्त्रज्ञाचा आनंद द्विगुणीत करील. अचुक कालमापन आणि खगोलशास्त्रतील तत्वे यांचे दर्शन घडविणारे हे यंत्र ह्या शास्त्रातील शास्त्रज्ञांना मौल्यवान वाटेल.'

१८० अंगुळे लांबीचा व ९० अंगुळे रुंदीचा एक चांगला आयताकृती फलक निवडावा. त्याच्या लांबीचे दोन समान भाग करुन फलकाच्या एका बाजूच्या

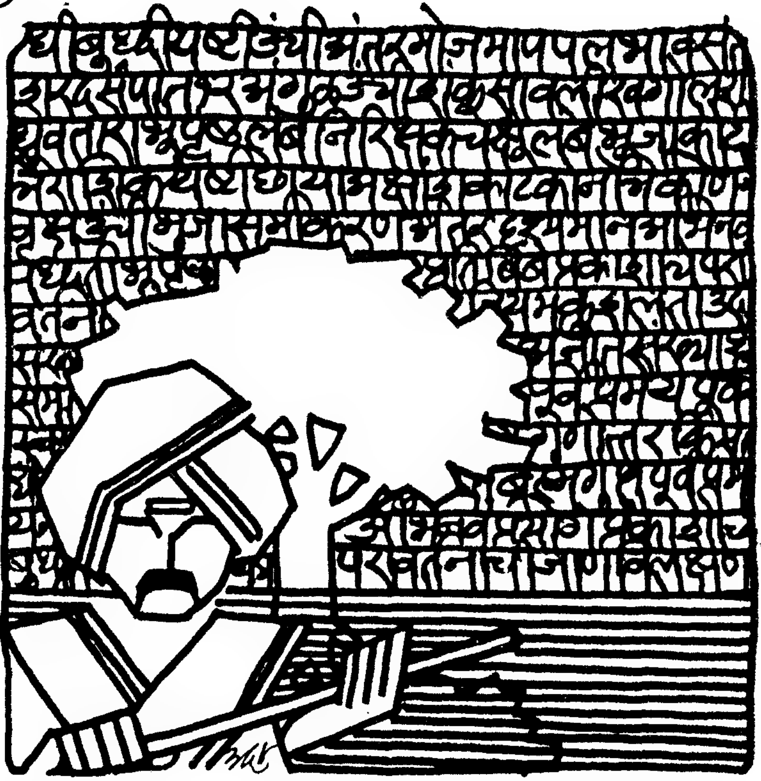
केंद्रबिंदूपाशी एक दोरी बांधावी. त्या बिंदूपासून लांबीला काटकोन करणारी एक रेषा काढावी. ही रेषा ९० समानभागत विभागून. त्याच्या प्रत्येक भागातून लांबीला समांतर रेषा काढाव्यात. नंतर ३० अंगुळावरील समांतर रेषा लंबरेषेला ज्या बिंदूत छेदेल तेथे एक छिद्र पाडून त्यामध्ये कोणत्याही लांबीची एक सरळ व बारिक सळई बसवावी. हाच फलक यंत्राचा अक्ष असेल.

अक्षबिंदू हे केंद्र घेऊन ३० अंगुळ त्रिज्जेचे एक वर्तुळ काढावे. त्याचा व्यास अर्थातच ६० अंगुळे असेल. वर्तुळाच्या परिघावर ६० घटिका आणि ३६० अंश व प्रत्येक अंशाच्या साठ कला कोराव्यात. नंतर एक टोकाला छिद्र असलेली ६० अंगुळ लांबीची व अर्धा अंगुळ रुंदीची एक पट्टिका तिच्या केंद्रापाशी छिद्र पाडून फलकाच्या अक्षात बसवावी. ही पट्टिका अक्षाभोवती फिरू शकेल असे पहावे. सदरहू पट्टिकेचे कशा प्रकारे विभाग करावेत हे नंतर भास्कराचार्यांनी सांगितले आहे. त्यामध्ये बरेच गणित असल्यामुळे हा भाग आपल्याला सोडून द्यावा लागेल. सरतेशेवटी तयार झालेले फलक यंत्र सूर्याच्या दिशेत अशा तऱ्हेने धरावे की फलकाच्या दोन्ही बाजू प्रकाशित होतील. ज्या ठिकाणी अक्षावरील सळईची सावली पडेल त्यावरून सूर्याची आकाशातील स्थिती निश्चित करता येईल.

मध्ययुगात अॅस्ट्रोलोब नावाचे एक यंत्र विशेषतः अरबस्तानात बनविले जात असे. भास्कराचार्यांचे फलकयंत्र त्या यंत्राचा पूर्वज असावे असे वाटते कारण अॅस्ट्रोलोबमधील काही संकल्पना फलकयंत्रात पहायला मिळतात. सूर्याचा 'अवर अँगल' म्हणजेच विक्षेप अचुकपणे मोजण्यासाठी फलकयंत्राचा उपयोग आहे.

***

३१

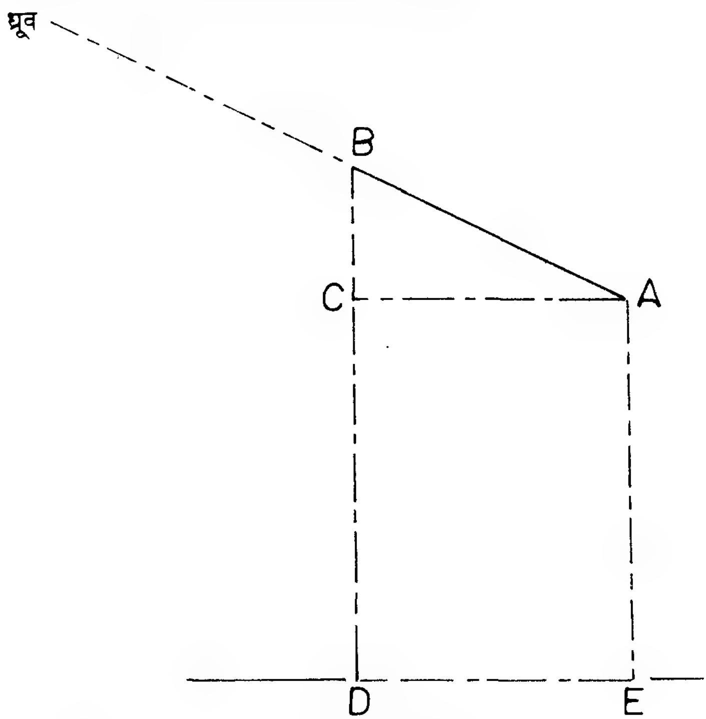


धीयंत्र

धी म्हणजे बुध्दी, धीयंत्र याचा अर्थ माणसाची बुध्दी हेच जणुकाही एक उत्तम यंत्र आहे. बुध्दिमान व्यक्तीच्या हातात एक सुंदर, नीतळ यष्टी म्हणजेच काठी दिली तर तो काय करू शकणार नाही? त्या यष्टीचा उपयोग करुन तो दूरवर असलेल्या वस्तूची उंची मोजू शकेल किंवा तिच्या अंतराचा अंदाजही बांधू शकेल.

मग ती वस्तू आकाशात असो, भूपृष्ठावर असो की अर्धवट पाण्यात बुडालेली असो. दुसऱ्या अर्थाने ही यष्टी म्हणजेच भास्कराचार्यांचे धीयंत्र आहे.

भास्कराचार्यांनी यष्टीचा उपयोग करुन वस्तूंची उंची आणि अंतरे यांचे मोजमाप करण्याचे जे प्रयोग दिले आहेत ते त्यांचा काळ लक्षात घेता खरोखरच अभिनव आहेत. त्या प्रयोगातून भास्कराचार्यांची विलक्षण बुध्दिमत्ता प्रगट होते. एका साध्या यष्टीचा उपयोग करुन अत्यंत उपयुक्त माहिती कशी हस्तगत करता येते हे पाहून आश्चर्य वाटल्याशिवाय रहात नाही. प्राचीन भारतीय खगोलशास्त्रज्ञ किती साध्या साध्या गोष्टींच्या साह्याने वेध घेण्यात कुशल होते याचाही आपल्याला अंदाज येतो. अगदी आज विसाव्या शतकाच्या शेवटी आणि एकविसाव्या शतकाच्या प्रारंभी हौशी खगोलशास्त्रज्ञांनी भास्कराचार्यांनी दिलेले यष्टीचे प्रयोग मुद्दाम करून पहावेत. अर्थातच हे प्रयोग कसे करायचे हे पहाणे उद्‌बोधक ठरेल.



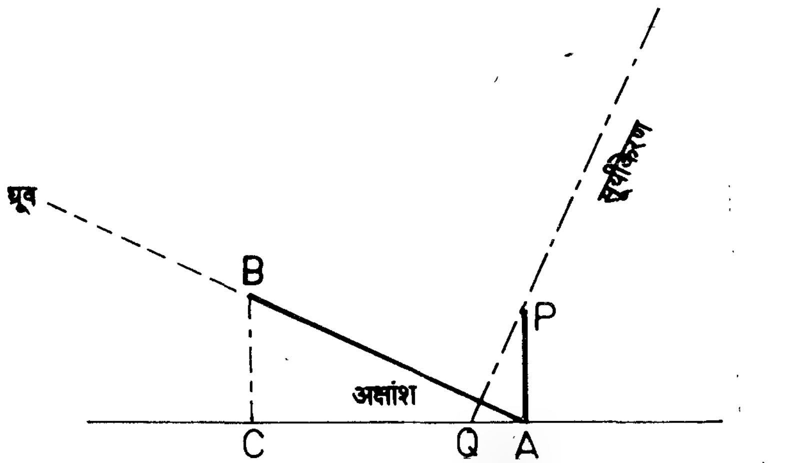
१) यष्टीच्या साह्याने पलभाः

भारतीय ज्योतिषात पलभेला फार महत्व आहे. पलभा म्हणजे सूर्य वसंत किंवा शरदसंपात बिंदूत असताना दुपारी १२ वाजता १२ अंगूळ उंचीच्या शंकूची सावली. आधुनिक परिभाषेत २१ मार्च किंवा २३ सप्टेंबर रोजी दुपारी १२ वाजता १२ अंगूळ उंचीच्या शंकूची सावली म्हणजेच पलभा. १२ अंगूळ हे अंतर साधारण १२ इंचाएवढे किंवा ३० सेंटीमीटर एवढे घ्यायला हरकत नाही. पलभेवरून प्राचीन भारतयीयांनी खगोलशास्त्रातील अनेक गुपिते शोधून काढली होती.

पलभा शोधून काढण्यासाठी यष्टीचे एक टोक आपल्या डोळ्यासमोर धरून तिचे दुसरे टोक ध्रूव ताऱ्याच्या दिशेत ठेवा. नंतर दोन्ही टोकांपासून भूपृष्ठावर लंब टाका. AB ह्या यष्टीचे B हे टोक ध्रूव ताऱ्याच्या दिशेत व A टोक निरीक्षकाच्या डोळ्याजवळ असेल आणि BD आणि AE हे भूपृष्ठावर टाकलेले लंब असतील तर आपल्याला साध्या गणिताने BC आणि AC ही दोन अंतरे काढता येतील. त्यामधील AC ह्या अंतराला भुजा व BC ह्या अंतराला कोटी अशी नावे भास्कराचार्यांनी दिली आहेत. या मोजमापातील महत्वाची गोष्ट अशी की भास्कराचार्यांनी BAC हा कोन मोजायला न सांगता काटकोन त्रिकोणाच्या बाजू मोजायला सांगितल्या आहेत, कारण कोन मोजण्यापेक्षा बाजू मोजणे सोपे आहे तसेच बाजू अचुक मोजता येतील कोन मात्र अचुक मोजता येणार नाही.

अशा मोजमापांवरून पलभा कशी काढायची असा प्रश्न निर्माण होईल पण त्यासाठी भास्कराचार्य एक साधे त्रैराशिक देतात. यष्टिच्या साह्याने मिळालेली भुजा विशिष्ट कोटी देत असेल तर १२ अंगूळ उंच असलेला शंकू किती कोटी देईल. ही कोटी म्हणजेच पलभा. या त्रैराशिकामागील भास्कराचार्यांचा तर्क समजून घेण्यासाठी २१ मार्च या दिवशी १२ अंगुळ शंकूची दुपारी १२ वाजता पडणारी सावली आणि यष्टीचा प्रयोग यात काय संबंध आहे हे पाहिले पाहिजे.

आकृतीमधील AB ही ध्रूवताऱ्याकडे रोखलेली यष्टी आहे आणि AP हा १२ अंगुळ उंचीचा शंकू आहे. २१ मार्च रोजी सूर्यावरून येणारा किरण AP या शंकूची AQ ही सावली निर्माण करील. AQ हीच आपली पलभा आहे. २१ मार्च रोजी APQ हा कोन ज्या स्थानी हा प्रयोग केला त्या स्थानाच्या अक्षांशा एवढा असतो. तसेच BAC हा कोनही तेच अक्षांश दर्शवितो. मुंबई साठी २१ मार्च रोजी APQ



हा कोन १९ अंशाएवढा असेल. कारण मुंबई १९ उत्तर अक्षांशावर आहे. अर्थात BAC हा कोनही मुंबईसाठी १९ अंशाचा राहिल. अशा प्रकारे ACB आणि QAP हे दोन काटकोन त्रिकोण समान आहेत, कारण त्यामधील २ कोन समान आहेत. यावरून आपल्याला पुढील समीकरणर लिहिता येईल.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AP}{AQ}$$

परंतू AQ = पलभा ,AC = भुजा, BC = कोटी, आणि AP = १२ अंगुळे

$$\therefore \quad \frac{\text{भुजा}}{\text{कोटी}} = \frac{\text{१२ अंगुळे}}{\text{पलभा}}$$

$$\therefore \quad \text{पलभा} = \frac{\text{कोटी} \times \text{१२ अंगुळे}}{\text{भुजा}}$$

समजा यष्टीची लांबी १०० सेंटीमीटर असेल आणि शंकूची उंची ३० सेंटीमीटर गृहीत धरली तर

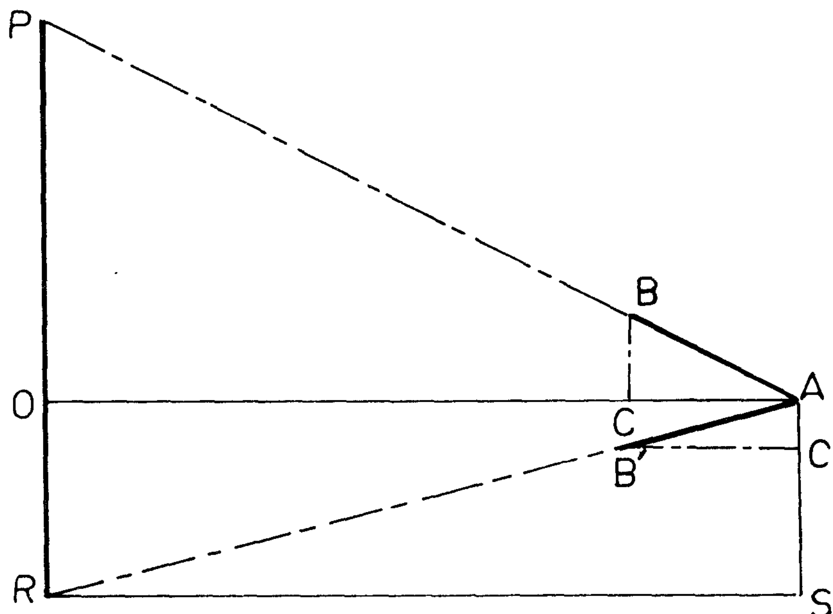
कोटी = BC = 100 Sin 19 = 100 x .325 = 32.5 cm.

भुजा = AC = 100 Cos19 = 100 x .945 = 94.5 cm.

त्यामुळे मुंबई येथील २१ मार्च रोजी दुपारी १२ वाजता ३० सेंटीमीटर उंचीच्या शंकूची सावली म्हणजेच पलभा पुढील प्रमाणे येईल.

$$\text{पलभा} = \frac{32.5 \times 30}{94.5} = 10.3 \text{ सेंटीमीटर}$$

२) यष्टीच्या साह्याने वृक्षाची उंची आणि अंतरः



ह्या प्रयोगासाठी केवळ दोन मोजमापे आवश्यक आहेत. प्रथम यष्टीचे टोक वृक्षाच्या शेंड्याच्या दिशेत ठेवून भुजा व कोटी निश्चित करा आणि नंतर यष्टीचे टोक वृक्षाच्या बुंध्याच्या दिशेत धरून पुन्हा भुजा व कोटी निश्चित करा. ह्या दोन निरीक्षणावरून वृक्षाची उंची व अंतर अगदी साध्या गणिताने निश्चित करता येते. भास्कराचार्यांनी दिलेले उदाहरण असे आहे.

यष्टीची लांबी = १४५ अंगुळे.

निरीक्षकाच्या डोळ्याची जमिनीपासून उंची = ६८ अंगुळे वृक्षाच्या शेंड्याचे निरीक्षण

करताना मिळणारी
भुजा = ११८ अंगुळे व कोटी = ८७ अंगुळे वृक्षाच्या बुंध्याचे निरीक्षण करताना मिळणारी
भुजा = १४४ अंगुळे व कोटी १७ अंगुळे. तर वृक्षाची उंची व निरीक्षकापासून अंतर किती.

या उदाहरणात अंगुळ हेच एकक आपण आहे तसे ठेवू. प्रत्यक्ष उंची आणि अंतर ठरविताना अंगुळांचे सेंटीमीटर मध्ये रुपांतर करता येईल.

आकृतीमध्ये P हा वृक्षाचा शेंडा व R हा त्याचा बुंधा आहे. वृक्षाच्या शेंड्याचे निरीक्षण करताना AC = 116 आणि BC = 87 अशा भुजा व कोटी मिळतात. आणि वृक्षाच्या बुंध्याचे निरिक्षण करताना,
C' B' = 144 आणि AC' = 17 अशा भुजा व कोटी मिळतात. आकृतीमधील AC' B' आणि A S R हे त्रिकोण समान आहेत, त्यामुळे आपल्या पुढील समीकरण लिहीता येते.

$$\frac{SR}{C'B'} = \frac{AS}{AC'}$$

$$\frac{SR}{144} = \frac{68}{17}$$

$$SR = \text{वृक्षाचे अंतर} = \frac{144 \times 68}{17} = 576 \text{ अंगुळे}$$

आकृतीमधील AQR आणि ACB हे त्रिकोणही समान आहेत. त्यामुळे आपल्याला पुढील समीकरण मिळते.

$$\frac{QP}{BC} = \frac{AQ}{AC}$$

$$\frac{QP}{87} = \frac{AQ}{116}$$

परंतु AQ = SR = अंतर = 576 अंगुळे

$$\therefore QP = \frac{87 \times 576}{116} = 432 \text{ अंगुळे}$$

ह्यामध्ये निरीक्षकाच्या डोळ्याची उंची मिळवायला हवी त्यामुळे

वृक्षाची उंची = QP + RQ

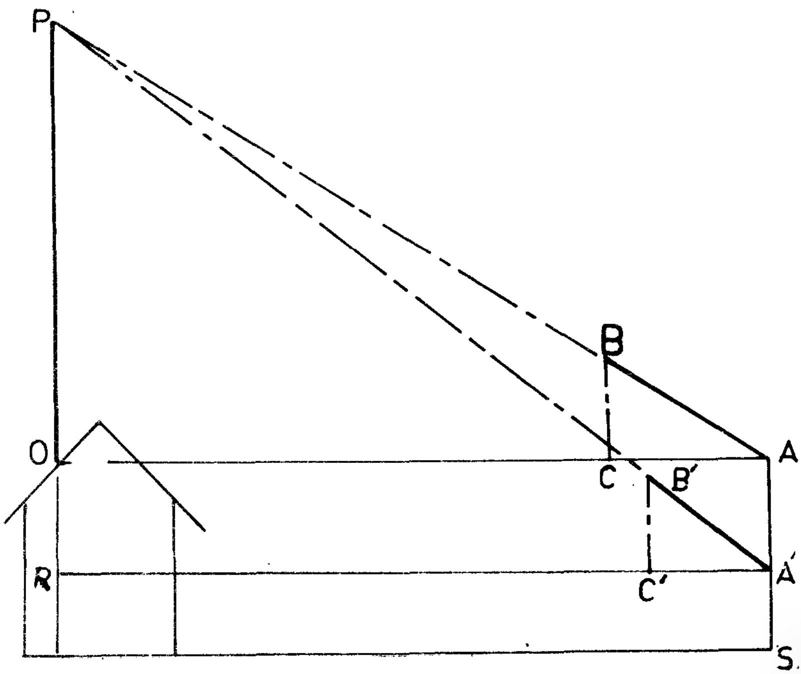
= 432 + 68 = 500 अंगुळे.

समजा १ अंगुळे म्हणजे सुमारे 2.5 से. मी. असे मानले तर

वृक्षाची उंची = 500 x 2.5 = 12.5 मीटर

वृक्षाचे अंतर = 576 x 2.5 = 14.4 मीटर

३) वृक्षाचा शेंडाच फक्त दृश्यमान असेल तर त्याची उंची व अंतर.



वृक्षाचा बुंधा दृश्यमान नसेल तर अर्थातच वर दिलेली पध्दत निरूपयोगी ठरेल. उदाहरणार्थ वृक्षाचा खालील भाग एखाद्या इमारतीने किंवा काही अडथळ्याने झाकला गेला असेल तर बुंध्याचे निरीक्षण करता येणार नाही. यावर भास्कराचार्यांनी एक

नामी तोडगा काढून आपल्या बुध्दिची चमक दाखविली आहे. अशा परिस्थितीत यष्टीच्या साह्याने प्रथम उभे राहून वृक्षाच्या शेंड्याचे निरीक्षण करा व नंतर बसून पुन्हा शेंड्याचे निरीक्षण करा, असे भास्कराचार्यांनी सुचविले आहे. यो दोन निरीक्षणात दोन निरनिराळ्या भुजा व कोटी मिळतील. ही निरीक्षणे करताना एकाच लांबीची यष्टी वापरली पाहिजे असेही बंधन नाही. त्यासाठी भास्कराचार्यांनी दिलेले उदाहरण असे आहे.

एक यष्टीने वृक्षाच्या शेंड्याचे उभे राहून निरीक्षण करताना,
भुजा = ९६ अंगुळे व कोटी = १ अंगुळ, अश किमती मिळाल्या.
दुसऱ्या यष्टीने वृक्षाच्या शेंड्याचे बसून निरीक्षण करताना,
भुजा = ९० अंगुळे व कोटी = १ अंगुळ, अशा किमती मिळाल्या.
निरीक्षक उभा असताना त्याचा डोळा भूपृष्ठापासून ७२ अंगुळांवर होता व तो बसला असताना २४ अंगुळांवर होता.
तर वृक्षाची उंची व अंतर किती.

भास्कराचार्यांनी ही अभिनव पध्दत पुढील आकृतीवरून सहज लक्षात येईल. वरील उदाहरणात निरनिराळ्या लांबीच्या दोन यष्टी वापरल्या आहेत हे लक्षात ठेवा. आकृतीमध्ये

$PQ = x$, $PR = y$ आणि $AQ = AR = d$

असे आपण गृहीत धरणार आहोत यातील
d = वृक्षाचे निरीक्षकापासून असलेले अंतर
$y - x$ = उभे असताना डोळ्याची उंची व बसल्यावर डोळ्याची उंची या मधील फरक
हा फरक ७२ - २४ = ४८ अंगुळांचा आहे.
म्हणून $y - x = ४८$
आकृतीमधील AQP आणि ACB हे त्रिकोण समना आहेत, म्हणून

$$\frac{PQ}{AQ} = \frac{BC}{AC}$$

किंवा

$$\frac{x}{d} = \frac{1}{96}$$

किंवा, $x = d\left(\frac{1}{96}\right)$

तसेच A'RP आणि A'C'B हे त्रिकोण समान आहेत, म्हणून

$$\frac{RP}{A'R} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

$$\frac{y}{d} = \frac{1}{90}$$

$$\therefore \quad y = d\left(\frac{1}{90}\right)$$

$$\therefore \quad y - x = \frac{d}{90} - \frac{d}{96} = d\left(\frac{1}{90} - \frac{1}{96}\right)$$

$$\therefore \quad 48 = \frac{6d}{90 \times 96}$$

$$\therefore \quad d = \frac{90 \times 96 \times 48}{6} = 69120 \text{ अंगुळे}$$

ही d ची किंमत x किंवा y च्या समीकरणात घातली की वृक्षाची उंची काढता येईल. x च्या समीकरणात d चा उपयोग केला तर त्यात निरीक्षक उभा असल्या मुळे त्याच्या डोळ्याची भूपृष्ठापासून असलेली ७२ अंगुळे ही उंची मिळवावी लागेल व y च्या समीकरणात d चा उपयोग केला तर निरीक्षक बसलेला असल्यामुळे त्याच्या डोळ्याची भूपृष्ठापासून असलेली २४ अंगुळे ही उंची मिळवावी लागेल.

$$x = \frac{d}{96}$$

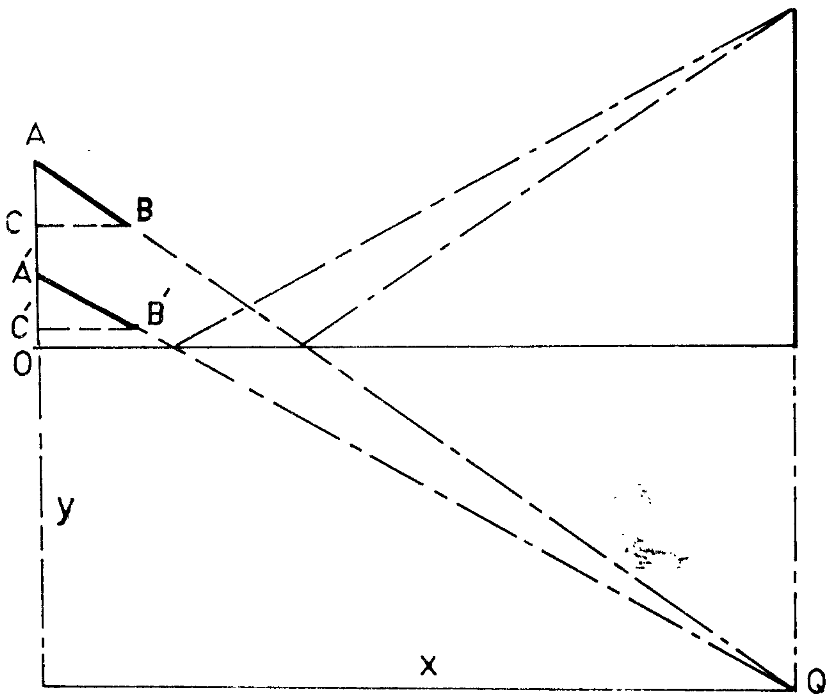
$$x = \frac{69120}{96} = 720$$

$\therefore$ वृक्षाची उंची = 720 + 72 = 792 अंगुळे

आणि वृक्षाचे अंतर = 69120 अंगुळे.

४) प्रतिबिंबावरून उंची आणि अंतरः

समजा एखादा वृक्ष सरोवराच्या काठाशी असेल तर त्याचे प्रतिबिंब सरोवराच्या पाण्यात पडेल, किंवा एखाद्या मोठ्या तलावामध्ये स्तंभ असेल तर त्याचेही प्रतिबिंब पाण्यात पडेल यष्टी आणि प्रतिबिंब यांचा उपयोग करून वृक्षाची किंवा स्तंभाची उंची व अंतर काढता येईल. प्रकाशाच्या परावर्तनाच्या नियमाची माहिती



असल्याशिवाय अशा प्रकारचा प्रयोग सुचणार नाही. भास्कराचार्यांना या नियमांची माहिती असली पाहिजे. त्यांचा या प्रयोगात त्यांनी कुशलतेने उपयोग करून घेतला आहे. या प्रयोगासाठी भास्कराचार्यांनी जे उदाहरण दिले ते असे.

निरीक्षकाने प्रथम उभे राहून आपल्या यष्टीच्या साह्याने वृक्षाच्या शेंड्याचे प्रतिबिंब पाण्यात पाहिले त्यावेळी त्याला भुजा = ४ आणि कोटी = ३ अशी निरीक्षणे मिळाली. त्यानंतर त्याने बसून पुन्हा आपल्या यष्टीच्या साह्याने वृक्षाच्या शेंड्याचे प्रतिबिंब पाहिले आणि त्यावेळी त्याला भुजा = ११ आणि कोटी = ८ असे निरीक्षण मिळाले. निरीक्षक उभा असताना त्याच्या डोळ्याची उंची भूपृष्ठापासून ७२ अंगुळे होती व बसल्यावर ती २४ अंगुळे झाली तर वृक्षाची उंची व अंतर किती ?

आकृतीमध्ये

निरीक्षक उभा असताना डोळ्याची उंची = OA = 72 अंगुळे

निरीक्षक बसला असताना डोळ्याची उंची = OA' = 24 अंगुळे

पाण्याची खोली = PO = y

वृक्षाचे अंतर PQ = x

निरीक्षक उभा असताना : भुजा = BC = 4, कोटी = AC = 3

निरीक्षक बसला असताना : भुजा = B'C' = 11, कोटी = A'C' = 8

A'C'B आणि A'PQ हे दोन त्रिकोण समान आहेत, म्हणून

$$\frac{8}{11} = \frac{y + 24}{x}$$

$\therefore \quad 8x - 11y = 264$

ACB आणि APQ हे दोन त्रिकोण समान आहेत, म्हणून

$$\frac{3}{4} = \frac{y + 72}{x}$$

$\therefore \quad 3x - 4y = 288$

आपल्याला दोन समीकरणे मिळाली आहेत व त्यात x आणि y ह्या दोन संख्या अज्ञात आहेत.पहिल्या समीकरणला 3 ने व दुसऱ्याला 8 गुणले.

$$3 \times 8x - 33y = 264$$

$$8 \times 3x - 32\,y = 288$$

ही समीकरणे सोडविली की आपल्याला पुढील उत्तरे मिळतील

वृक्षाची उंची = 1512 अंगुळे

वृक्षाचे अंतर = 2112 अंगुळे

***

परिशिष्टः

भास्कराचार्यांचे पूर्व प्रमेय

$$Nx^2 + k = y^2 \qquad (1)$$

हे आपल्याला दिलेले समीकरण आहे. समजा त्याचे पूरक समीकरण पुढीलप्रमाणे तयार केले.

$$Na^2 + k = b^2 \qquad (2)$$

या समीकरणाच्या आधाराने x ह्या अव्यक्ताची न्यूनतम किंमती $\frac{am + b}{k}$ अशा स्वरूपाची आहे असे गृहीत धरले. त्यामुळे,

$$N\left(\frac{am + b}{k}\right)^2 = \frac{Na^2m^2 + 2ambN + Nb^2}{k^2} \qquad (3)$$

क्रमांक (2) च्या दोन्ही बांजूना N ने गुणले.

$\therefore$

$$Na^2 + Nk = Nb^2 \qquad (4)$$

क्रमांक (4) मधील Nb^2 ची किंमत क्रमांक (3) मध्ये घातली वे ते पुन्हा लिहिले.

$$N\left(\frac{am + b}{k}\right)^2 = \frac{Na^2m^2 + 2ambN + N^2a^2 + Nk}{k^2} \qquad (5)$$

क्रमांक (5) ची उजवी बाजू पूर्ण वर्गाच्या स्वरूपात आपल्याला हवी आहे त्यासाठी त्या समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंना पुढील गुणोत्तर मिळविले.

$$= \frac{- Na^2m^2 - Nk + m^2b^2}{k^2} \qquad (6)$$

$$\therefore \quad N\left(\frac{am + b}{k}\right)^2 + \frac{- Na^2m^2 - Nk + m^2b^2}{k^2} = \left(\frac{Na + mb}{k}\right)^2 \qquad (7)$$

$$\therefore \quad N\left(\frac{am + b}{k}\right)^2 + \frac{m^2(b^2 - Na^2) - Nk}{k^2} = \left(\frac{Na + mb}{k}\right)^2 \qquad (8)$$

परंतु क्रमांक (2) वरून मिळणारी

$$(b^2 - Na^2) = k \qquad (9)$$

ही किंमत (8) मध्ये घातली, व ते पुन्हा लिहिले.

$$N\left(\frac{am+b}{k}\right)^2 + \frac{m^2k - Nk}{k^2} = \left(\frac{Na+mb}{k}\right)^2$$

$$\therefore \quad N\left(\frac{am+b}{k}\right)^2 + \frac{m^2 - N}{k^2} = \left(\frac{Na+mb}{k}\right)^2 \qquad (10)$$

भास्कराचार्यांचे पूर्व प्रमेय हेच आहे.

ब्रह्मगुप्ताचे पूर्व प्रमेय

समजा आपल्याजवळ पुढील दोन समीकरणे आहेत.

$$Na1^2 + k1 = b1^2 \qquad (1)$$

$$Na2^2 + k2 = b2^2 \qquad (2)$$

क्रमांक (1) च्या दोन्ही बाजूंना $b2^2$ ने गुणा

$$Na1^2\, b2^2 + k1\, b2^2 = b1^2\, b2^2 \qquad (3)$$

क्रमांक (3) च्या डाव्या बाजूकडील दुसऱ्या भागात $b2^2$ ची क्रमांक (2) मधील किंमत घाला, व ते पुन्हा लिहा,

$$Na^21\, b2^2 + k1\,(Na2^2 + k2) = b1^2b2^2$$

$$\therefore \quad Na1^2b2^2 + Nk1\, a2^2 + k1\, k2 = b1^2b2^2 \qquad (4)$$

क्रमांक (4) च्या डाव्या बाजूकडील दुसऱ्या भागात क्रमांक (1) वरून K1 ची किंमत घाला व ते पुन्हा लिहा,

$$\therefore \quad Na1^2\, b2^2 + Na2^2\,(b1^2 - Na1^2) + k1\, k2 = b1^2\, b2^2$$

$$\therefore \quad N\,(a1^2\, b2^2 + a2^2\, b1^2) + k1k2 = b1^2\, b2^2 + N^2a1^2a2^2 \qquad (5)$$

क्रमांक (5) च्या दोन्ही बाजूंमध्ये $\pm 2\, Na1b1a2b2$ मिळविले,

$$\therefore \quad N\,(a1b2 \pm a2\, b1)^2 + k1k2 = (b1b2 \pm Na1a2)^2 \qquad (6)$$

क्रमांक (6) मध्ये a1 = a2 आणि b1 = b2 व k1 = k2 अशा किंमती असतील तर ते पुढीलप्रमाणे लिहिता येईल.

$$N\,(2ab)^2 + k^2 = (b^2 \pm Na^2)^2 \qquad (7)$$

क्रमांक (6) व (7) आपण ब्रह्मगुप्ताची पूर्व प्रमेये म्हणून वापरली आहेत.

संदर्भ ग्रंथ

१) लीलावती	:	ना. ह. फडके
२) लीलावती	:	पंडित श्रीलषणलाल झा
३) लीलावती	:	पंडित रामस्वरुप शास्त्री
४) बीजगणितम्	:	दैवज्ञ पंडित देवचंद्र झा
५) बीजगणित	:	विनायक पांडुरंगशास्त्री खानापूरकर
६) सिद्धांतशिरोमणेः गोलाध्यायः	:	पंडित केदारदत्त जोशी
७) गणिताध्याय	:	विनायक पांडुरंगशास्त्री खानापूरकर
८) सिद्धांतशिरोमणेः गणिताध्यायः	:	पंडित केदार दत्त जोशी
९) सिद्धांत शिरोमणी गणिताध्याय	:	पंडित गिरिजाप्रसाद द्विवेदी
१०) भारतीय ज्योतिष	:	शंकर बाळकृष्ण दिक्षित
११) भारतीय ज्यातिषका इतिहास	:	डॉ. गोरख प्रसाद
१२) ज्योतिर्मिमांसा	:	नीलकंठ सोमयाजी
१३) Hindu Astronomy	:	W. Brennand
१४) The Surya Siddhanta	:	Rev. Ebenexer Burgess
१५) History of Hindu Mathematics	:	Datta and Singh
१६) Ancient Hindu Astronomy	:	D. A. Somayaji
१७) Spherical Astronomy	:	Smart
१८) Ancient Indian Mathematics and Vedh	:	L. V. Gurjar
१९) Indian Astronomy a Source book	:	B. V. Subbarayappa K. V. Sarma
२०) Siddhanta Siromani	:	Lancelof Wilkinson

भारतीय खगोलशास्त्राचा पाया आर्यभटाने रचला,
आणि त्याचा कळसाध्याय भास्कराचार्यांनी लिहिला.
हा गणितचक्रचूडामणी आठशे वर्षापूर्वी निवर्तला,
पण गणिताच्या इतिहासात तो अजरामर झाला.
आजही त्यांची लीलावती गणितज्ञांना मोहिनी घालते,
आणि भास्कराचार्यांच्या उत्तुंग प्रतिभेची साक्ष देते.
कुशाग्र बुद्धिमत्ता, गणिती विद्वता, पांडित्य आणि कवित्व,
अशा गुणांचा सुरेख संगम, असे होते त्यांचे व्यक्तित्व.
सह्यगिरीच्या कुशीत जन्माला आलेला हा गणिती,
भारतीय संस्कृतीचे एक रत्न होते यात शंकाच नाही.
भास्कराचार्यांच्या अष्टशताब्दीस्मृतिनिमित्त लिहिलेला,
'गणितशिरोमणी भास्कराचार्य'
हा आहे त्यांच्या संकल्पनांचा मागोवा,
आणि त्या महान् गणितज्ञाला दिलेली मानवंदना.

मोरया
प्रकाशन

